الخميس: 12/3/2015

المحاضرة الثانية:

استخدام طريقة بيكارد التقريبية لإيجاد حل جملة معادلات تفاضلية:

لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية التالية:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \qquad ; \quad y = y(x) \\ z' &= \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \qquad ; \quad z = z(x) \\ y(x_0) &= y_0 \quad \& \quad z(x_0) = z_0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

بإجراء نفس الخطوات (في المحاضرة السابقة - طريقة بيكارد التقريبية لإيجاد حل المعادلة التفاضلية) نحصل على التقريب النوني (y_n, z_n) لمسألة القيم الحدية

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}, z_{n-1})\, ds \qquad (2)$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}, z_{n-1})\, ds \qquad (3)$$

مثال:

أوجد التقريب الثالث لحل جملة المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = x^3 (y + z)$$

$$x_0 = 0 \ , \quad y_0 = 1 \ , \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

$y(0) = 1 \ , \ z(0) = \frac{1}{2}$: or

الحل:

$$f(x,y,z) = z \quad , \quad g(x,y,z) = x^3(y+z)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

نعوض في (2)

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x z_{n-1} \, ds$$

نعوض في (3)

$$z_n(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 (y_{n-1} + z_{n-1}) \, ds$$

$$n=1 \Rightarrow y_1(x) = 1 + \int_0^x z_0 \, ds$$

$$= 1 + \int_0^x \frac{1}{2} \, ds = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$z_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 (y_0 + z_0) \, ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x s^3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) ds$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \int_0^x s^3 \, ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} x^4$$

$$n=2 \Rightarrow y_2(x) = 1 + \int_0^x z_1 \, ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{8} s^4\right] ds$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^5$$

$$n=2 \Rightarrow z_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_1 + z_1)\,ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x s^3\left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4\right)ds$$

$$z_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{64}x^8$$

$$n=3 \Rightarrow y_3(x) = 1 + \int_0^x z_2\,ds = 1 + \int_0^x\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{10}s^5 + \frac{3}{64}s^8\right]ds$$

$$\boxed{y_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{60}x^6 + \frac{1}{192}x^9}$$

$$n=3 \Rightarrow z_3(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_2 + z_2)\,ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x s^3\left[1 + \frac{s}{2} + \frac{3}{40}s^5 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{10}s^5 + \frac{3}{64}s^8\right]ds$$

$$\boxed{z_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{64}x^8 + \frac{7}{360}x^9 + \frac{1}{256}x^{12}}$$

مثال:

أوجد التقريب الثالث لإيجاد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = x^3\left(y + \dfrac{dy}{dx}\right) \\ y(0) = 1 \quad , \; y'(0) = \dfrac{1}{2} \overset{or}{\Longleftrightarrow} x_0 = 0 \; , \; y_0 = 1 \; , \; y'_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

الحل:

المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية تكافئ جملة معادلتين تفاضليتين من المرتبة الأولى

نفرض $y' = z \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = z$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z = f(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = x^3 (y + z) = g(x, y, z) \\ x_0 = 0 \quad , \; y_0 = 1 \quad , \; z_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

آلت إلى حل جملة معادلتين تفاضليتين وهما المعادلتين التفاضليتين للمثال السابقة ويمكن التعميم بشكل مشابه

مقدمة في وحدانية ووجود حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

لتوضيح المفهوم نطرح المثال التالي:

لتكن لدينا مسألة القيم الابتدائية التالية:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \; y \neq 0 \qquad (1)$$

نقسم على $|y| \neq 0$

$$|y'| + |y| = 0 \Rightarrow \left|\frac{y'}{y}\right| + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1$$

$$\Rightarrow y' = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{-y} = dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

تكامل:

$$\ln y = -x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln c = \ln e^{-x}$$

$$\ln \frac{y}{c} = \ln e^{-x} \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-x} \Rightarrow \boxed{y = c \cdot e^{-x}}$$

لتعيين c نعوض في الشروط الحدية $1 = c \cdot e^{-0}$

$\Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{y = e^{-x}}$ حل هذه المعادلة

$x = 0$ & $y = 1 \Rightarrow 1 = 1$ محقق

نعوض هذا الحل بالمعادلة المعطاة { حيث الحل هو تحويل المعادلة إلى مطابقة } نحصل على $0 = 1 + 0$ وصلنا إلى تناقض لأن $0 \neq 1$

فالحل المعطى لا يحقق الشرط الابتدائي.

هذه المعادلة لا تقبل سوى الحل الصفري $y = 0$ ، والحل الصفري بأنه لا يقبل

ومنه المسألة (1) ليس لها حل على الإطلاق ضمن الشروط المعطاة.

لنطرح مثالاً آخر:

$$\frac{dy}{dx} = x \quad , \quad y(0) = 1$$

$$dy = x \cdot dx$$

بالمكاملة:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2 + c}$$

لتعيين c نعوض الشروط الحدية: $c = 1$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x^2 + 1}$$

محقق $y = 1$ & $x = 0 \Rightarrow 1 = 1$

نعوض في المعادلة:

$0 = 0$ ومنه يوجد حل لهذه المسألة.

لنطرح مثالاً آخر:

لتكن لدينا مسألة الشروط الابتدائية (معادلة تفاضلية مقرونة بشروط ابتدائية):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

نفصل المتحولات:

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x}$$

بالمكاملة

$$\Rightarrow \ln|y-1| - \ln c = \ln x$$

$$\ln\frac{y-1}{c} = \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y-1}{c} = x \Rightarrow y - 1 = c.x \Rightarrow \boxed{y = cx + 1}$$

من أجل تحديد الثابت c نلاحظ أنه لا يمكن تحديد قيمة للثابت c، ومعنى هذا الكلام أن للمسألة المطروحة عدد غير منتهي من الحلول معطاة بالعلاقة:

$$y = cx + 1$$

حيث c ثابت اختياري

هذا الجدل القائم يقودنا إلى أن مسألة القيم الابتدائية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

قد يكون لها حلاً وحيداً أم أكثر من حل أو لا يوجد لها حل على الإطلاق وهذا يوجهنا إلى أسئلة متعددة هامة وأساسية.

أسئلة أساسية وهامة:

1 وجود الحل:

تحت أي شروط يكون لمسألة القيم الابتدائية المعطاة حلاً وحيداً على الأقل

2 وحدانية الحل:

تحت أي شروط يكون لمسألة القيم الابتدائية السابقة حلاً وحيداً.

تسمى النظرية التي تحوي هذه الشروط بمبرهنة الوجود والوحدانية.

تعريف شرط ليبشتز:

يقال أن الدالة $f(x, y)$ تحقق شرط ليبشتز في المنطقة D من المستوي xoy إذا وجد ثابت موجب $k > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant k |y_2 - y_1|$$

حيث k يسمى ثابت ليبشتز للدالة $f(x, y)$، أما النقطتان $(x, y_1), (x, y_2)$ فهما تقعان في المنطقة D من المستوي xoy ; $D \subset R^2$

مبرهنة الوجود والوحدانية للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

نص المبرهنة:

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في الساحة (المنطقة) D من المستوي xoy ولتكن M ثابت بحيث تكون الدالة محدودة

$$(1) \quad |f(x,y)| \leqslant M \quad ; \quad (x,y) \in D$$

والدالة f تحقق شرط ليبشتز بالنسبة لـ y

$$(2) \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant k\,|y_1 - y_2| \quad ; \quad k > 0$$

لأي قيم على x, y_1, y_2

(x,y_1) , (x,y_2) تقعان في المنطقة D ولتكن R هو المستطيل المعرف بالعلاقة

$$(3) \quad |x - x_0| \leqslant a \quad ; \quad |y - y_0| \leqslant b$$

وهذا المستطيل يقع في الساحة D

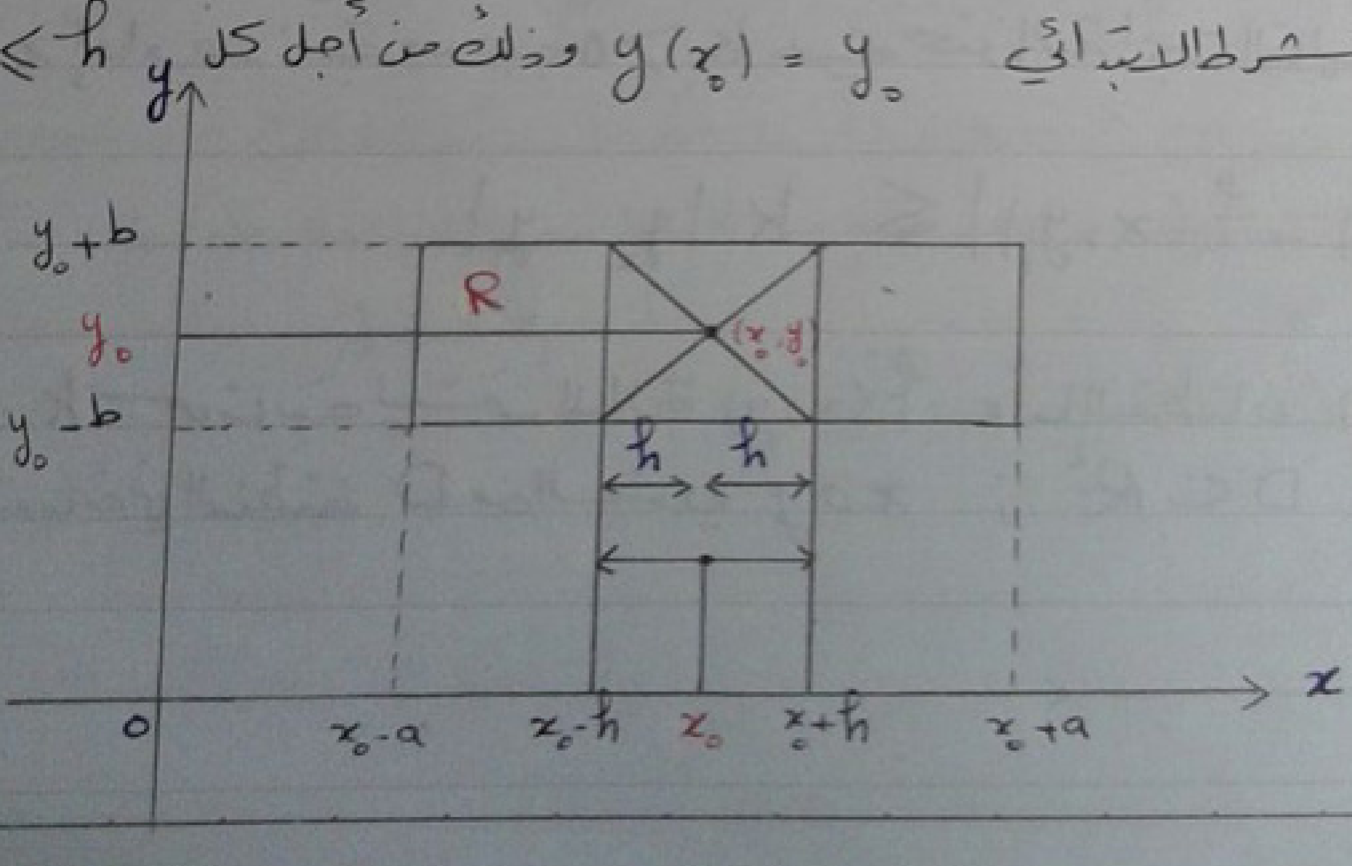
ولتكن:
$$M.h < b$$

where; $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

عندئذ يوجد حل وحيد $y = y(x)$ للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

تحقق الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ وذلك من أجل كل $|x - x_0| \leqslant h$



البرهان:

سنستخدم طريقة التقريبات المتتالية بالنسبة لإثبات هذه المبرهنة بحيث يتحقق:

$$|x - x_0| \leqslant h$$

ولتكن $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x), \dots$ هي متتالية من الدوال وتعطى كما يلي:

$$\left.\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1)\, ds \\
y_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2)\, ds \\
&\vdots \\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\, ds
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

سنجزأ البرهان لهذه النظرية إلى خمس خطوات رئيسية:

الخطوة الأولى:

سوف نثبت أنه من أجل كل $x_0 + h \geqslant x \geqslant x_0 - h$

فإن المنحني $y = y_n(x)$ يقع داخل المستطيل R أي أن:

$$y_0 - b < y < y_0 + b$$

لنشكل الفرق $y_1 - y_0$ ونأخذ القيمة المطلقة:

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds \right|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s,y_0)| \cdot |ds|$$

$$|y_1 - y_0| \leqslant M|x - x_0| < M.h < b$$

هذا من جهة ، ومن جهة ثانية :

لنفرض أن $y(x) = y_{n-1}(x)$ يقع في R وهذا يعني أن الدالة $f(x, y_{n-1}(x))$

حسب الفرض معرفة ومستمرة ومحدودة

$$\Rightarrow |f(x, y_{n-1}(x))| \leqslant M$$

على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$

بنفس الأسلوب نشكل الفرق $y_n - y_0$ ونأخذ القيمة المطلقة

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\, ds \right|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1})| \cdot |ds| \leqslant M|x - x_0|$$

$$< M.h < b$$

وهذا يعني أن $y_n(x)$ تقع في R وهذا يعني بدوره أن الدالة $f(x, y_n(x))$ معرفة ومستمرة على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$ وهذا يعني أن النتيجة المطلوبة محققة من أجل أي قيمة لـ n مستخدمين بذلك مبدأ الاستقراء الرياضي.