المحاضرة الرابعة.. "عملي"
الخميس 2015/4/2..

تمرين:
عرف جبر بوريل في $\mathbb{R}$ ثم أوجد 8 صفوف تولده .

• جبر بوريل في $\mathbb{R}$:
هو أصغر جبر-تام يحوي صف المجالات المفتوحة ⟺
هو أصغر جبر-تام يحوي صف المجالات المغلقة ⟺ . . . .
• إنَّ أي صف من صفوف المجالات المشهورة يولد جبر بوريل:

τ_1 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_1 = \{]a,b[\; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_1$

τ_2 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_2 = \{ [a,b[\; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_2$

τ_3 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_3 = \{]a,b] \; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_3$

τ_4 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_4 = \{ [a,b] \; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_4$

τ_5 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_5 = \{]a,\infty[\; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_5$

τ_6 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_6 = \{ [a,\infty[\; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_6$

τ_7 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_7 = \{]-\infty,b[\; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_7$

τ_8 المولدة بصف المجالات: $\mathcal{C}_8 = \{]-\infty,b] \; ; a,b \in \mathbb{R} , a \leq b \} = \mathcal{J}_8$

هل $\tau_2 \subseteq \tau_1$ ؟

برهن أنّ جبر بوريل المولد بصف المجالات $]a,b[$ هو نفسه جبر بوريل المولد بصف المجالات $[a,b[$ ؟

أي لنبرهن أنّ : $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$

لذلك نبرهن أنّ : $\mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$

$\mathcal{C}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$

$\forall A \in \mathcal{C}_1 \quad ; A =]\alpha, \beta[$

$: A =]\alpha, \beta[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha + \frac{\ell}{n}, \beta[\quad ; \ell = \beta - \alpha$

إنّ كل مجموعة واردة في هذا الاجتماع هي عنصر من $\mathcal{C}_2$ فاتحادها المعدود سينتمي إلى أي جبر تام يحوي $\mathcal{C}_2$ إذاً سينتمي إلى $\sigma(\mathcal{C}_2)$ وبالتالي يتحقق :

$\mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$

$\forall B \in \mathcal{C}_2 : B = [\alpha, \beta[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]\alpha - \frac{\ell}{n}, \beta[\quad ; \ell = \beta - \alpha$

إنّ كل مجموعة واردة في هذا التقاطع هي عنصر من $\mathcal{C}_1$ فتقاطعها المعدود سينتمي إلى أي جبر تام يحوي $\mathcal{C}_1$ إذاً ينتمي إلى $\sigma(\mathcal{C}_1)$ وبالتالي يتحقق :

$\mathcal{C}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$

نأخذ σ للطرفين :

$\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma\sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_2)$

$\sigma(\mathcal{C}_2) \subseteq \sigma\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_1)$

$\Rightarrow \hat{\mathcal{C}}_1 = \hat{\mathcal{C}}_2$

ملاحظة: إذا كان لدينا صفان $A_1 \subseteq A_2$ فإنّ :

- $\sigma(A_1) \subseteq \sigma(A_2)$

- $\sigma\sigma(A_1) = \sigma(A_1)$

برهن أنّ $\hat{e}_1 = \hat{e}_3$.

$$\forall\,]\alpha,\beta[\in e_1 :]\alpha,\beta[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]\alpha, \beta - \frac{\ell}{n}] \quad ; \ell = \beta - \alpha$$

إنّ كل مجموعة واردة في هذا الاجتماع هي عنصر من e_3 فما عادها المعدود سينتمي إلى أي جبر تام يحوي e_3 ، إذاً سينتمي إلى $\sigma(e_3)$ وبالتالي تحقق :

$$e_1 \subseteq \sigma(e_3)$$

$$\sigma(e_1) \subseteq \sigma\sigma(e_3) = \sigma(e_3)$$

$$\forall\,]\alpha,\beta] \in e_3 :]\alpha,\beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]\alpha, \beta + \frac{\ell}{n}[\quad ; \ell = \beta - \alpha$$

إنّ كل مجموعة واردة في هذا التقاطع هي عنصر من e_1 فتقاطعها المعدود سينتمي إلى أي جبر تام يحوي e_1 إذاً ينتمي إلى $\sigma(e_1)$ وبالتالي تحقق :

$$e_3 \subseteq \sigma(e_1)$$

$$\sigma(e_3) \subseteq \sigma\sigma(e_1) = \sigma(e_1)$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1 = \hat{e}_3$$

برهن أنّ: $\hat{e}_1 = \hat{e}_4$.

$$\forall\,]\alpha,\beta[\in e_1 :]\alpha,\beta[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha + \frac{\ell}{n}, \beta - \frac{\ell}{n}] \quad , \ell = \beta - \alpha$$

إنّ كل مجموعة واردة في هذا الاجتماع هي عنصر من e_4 فما عادها المعدود سينتمي إلى أي جبر تام يحوي e_4 إذاً سينتمي إلى $\sigma(e_4)$ وبالتالي تحقق :

$$e_1 \subseteq \sigma(e_4)$$

$$\sigma(e_1) \subseteq \sigma\sigma(e_4) = \sigma(e_4)$$

$$\forall\, [\alpha,\beta] \in e_4 : [\alpha,\beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]\alpha - \frac{\ell}{n}, \beta + \frac{\ell}{n}[$$

إن كل مجموعة واردة في هذا التقاطع هي عنصر من e_1 فتقاطعها المعدود سينتمي إلى أي جبر تام يحوي e_1 إذاً ينتمي إلى $\sigma(e_1)$ وبالتالي تحقق :

$$e_4 \subseteq \sigma(e_1)$$

$$\sigma(e_4) \subseteq \sigma\sigma(e_1) = \sigma(e_1) \Rightarrow \hat{e}_1 = \hat{e}_4$$

انتهت المحاضرة