الفصل الثاني: قواعد غروبنر

تعريف:

نفرض I مثالي من $K[x_1, \dots x_n]$ غير صفري ونفرض $G = g_1, \dots g_t \subset I$

نثبت علاقة ترتيب على الحدوديات عندئذٍ:

نقول عن G أنها تشكل قاعدة غروبنر للمثالي I إذا وفقط إذا حقق الشرط التالي:

$\forall f \in I : f \neq 0 \quad \exists i \in \{1, \dots t\}$ و $Lp(g_i)$ يقبل القسمة على $Lp(f)$

مبرهنة: ← تعريف جديد لقاعدة غروبنر 2 و 3

نفرض I مثالي غير صفري من $K[x_1, \dots x_n]$ ولنفرض $G = \{g_1, \dots g_t\} \subset I$ عندئذٍ القضايا التالية متكافئة:

1) G قاعدة غروبنر

2) $f \in I \Leftrightarrow f \xrightarrow{G} 0$ حيث $\forall f \in K[x_1, \dots x_n]$

3) نفرض $\langle G \rangle = \langle g_1, \dots g_t \rangle$ عندئذٍ $Lp(I) = Lp(\langle G \rangle)$

حيث $Lp(I) = \{Lp(f) ; f \in I\}$

الإثبات:

1 ⇐ 2:

(⇐): إذا كان $f \xrightarrow{G} 0$ عندئذٍ يوجد $q_1, \dots q_t$ من $K[x_1, \dots x_n]$ حيث

$f = q_1 g_1 + \dots + q_t g_t$ ومنه $f \in I$.

كتبنا f تركيب خطي لـ g_i خاصة بقاعدة غروبنر

(⇒): نفرض أنه $f \xrightarrow{G} r$ حيث $r \neq 0$ عندئذٍ:

$r = f - (q_1 g_1 + \dots + q_t g_t) \in I$ ← من خوارزمية القسمة

ومنه يوجد $g_i \in G$ حيث $Lp(r)$ يقبل القسمة على $Lp(g_i)$

وهذا تناقض، ومنه $f \xrightarrow{G} 0$

ALADIIB.net
منتدى الحضارة

(2) $\Leftarrow$ (3):

بما أنه $G \subset I$ عندئذ $Lp(\langle G\rangle) \subset Lp(I)$ وضوحاً

نفرض $h \in Lp(I)$:

عندئذ يوجد $f \in I$ حيث $Lp(f) = h$ حسب 2

ومنه $f \xrightarrow{G} 0$ ومنه يوجد g_i من G حيث $Lp(f)$ يقبل القسمة على $Lp(g_i)$

وهذا يعني أن $h \in Lp(\langle G\rangle)$ (من أول عملية قسمة)

(3) $\Leftarrow$ (1):

نفرض $f \in I$ عندئذ $Lp(f) \in Lp(\langle G\rangle)$ وهذا يعني وجود g_i من G

بحيث $Lp(f)$ يقبل القسمة على $Lp(g_i)$ وبالتالي G قاعدة غروبنر للمثالي I حسب التعريف.

مبرهنة بدون اثبات: (لوجود القاعدة)

نفرض I مثالي غير صفري من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذ I يملك قاعدة غروبنر.

ونفرض $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدة غروبنر لـ I عندئذ $I = \langle G\rangle = \langle g_1,\dots,g_t\rangle$

مبرهنة: (لوحدانية الباقي)

نفرض $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ قاعدة غروبنر للمثالي I من $K[x_1,\dots,x_n]$ عندئذ باقي قسمة أي كثير حدود f من $K[x_1,\dots,x_n]$ على G وحيد

الاثبات:

نفرض أن $f \xrightarrow{G} r_1$, $f \xrightarrow{G} r_2$ حيث كل حد من حدود r_1, r_2 لا يقبل القسمة على $Lp(g_1), \dots, Lp(g_t)$

ومنه $f - r_1 , f - r_2 \in I$ وبالتالي $r_1 - r_2 \in I$ (طرحهم)

ومنه حسب مبرهنة:

$$r_1 - r_2 \xrightarrow{G} 0$$

ولأنه هذا غير ممكن إلا إذا كان $r_1 - r_2 = 0$ أي أنه $r_1 = r_2$

ALHADIB.net بيت الحضارة

ملاحظة:

وإن عكس المبرهنة السابقة صحيح بالضرورة:
أي إذا كان باقي قسمة أي كثير حدود على G وحيد فإن G تشكل قاعدة غروبنر للمثالي

$$I = \langle g_1, \dots g_t \rangle$$

مثال: نفرض $f = y^2x - x$, $f_1 = yx - y$, $f_2 = y^2 - x \in \mathbb{R}[x, y]$
عندئذٍ من أجل $x >_{lex} y$ أوجد باقي قسمة

f على $H_1 = [f_1, f_2]$ ثم على $H_2 = [f_2, f_1]$ ثم استنتج أن $H = \{f_1, f_2\}$
ليست قاعدة غروبنر لـ $I = \langle f_1, f_2 \rangle$.

الحل:

* التقسيم على f_1 :

$$yx - y \;\big)\; y^2x - x$$

$$y^2x - y^2$$

$$\overline{\quad y^2 - x \quad}$$

التقسيم على f_2

$$1$$

$$y^2 - x \;\big)\; y^2 - x$$

$$y^2 - x$$

$$r_1 = \overline{\;0\;}$$

*

$$x$$

$$y^2 - x \;\big)\; y^2x - x$$

$$y^2x - x^2$$

$$r_2 = \overline{x^2 - x}$$

ومنه $f \xrightarrow{f_1} y^2 - x \xrightarrow{f_2} 0$

$f \xrightarrow{f_2} x^2 - x \xrightarrow{f_1} x^2 - x$

من جهة أخرى : $h = x^2 - x = f - \dfrac{Lt(f)}{Lt(f_2)} \cdot f_2 \in I$

* لكن $h \overset{H}{\not\longrightarrow} 0$

إذ

* نلاحظ أن

$LP(h) = x^2$

$LP(f_1) = yx$

$LP(f_2) = y^2$

حيث $LP(h)$ لا يقبل القسمة على $LP(f_1)$ ، $LP(f_2)$.

ملاحظة : أثبت أن $G = \{x, y\}$ قاعدة غروبنر للمثالي $I = \langle x, y \rangle$ في $\mathbb{R}[x,y]$.

ALADID.net

منتديات الحضارة