الثلاثاء: 17/3/2015

المحاضرة الأولى (عملي):

"تمارين مساندة" (صفحة 21)

أولاً: لنفترض أنّ $\sum_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

حيث $n$ عدد طبيعي

أ) $\sum_1 , \sum_2 , \sum_3 , \sum_4$

ب) برهن بالاستقراء أنّ:

$$\sum_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

أ)

$$\sum_1 i^2 = 1^2 = 1 \quad , \quad \sum_2 i^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\sum_3 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad , \quad \sum_4 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

ب) خطوة البداية: نثبت صحتها من أجل $n = 1$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = \sum_1 i^2$$

محققة.

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = 5 = \sum_2 i^2$$

محققة

ملاحظة: في الامتحان تجب الإثبات من أجل $n = 2$ على الأقل.

خطوة الاستقراء: نفرض صحة العلاقة من أجل $n = k$ ثم نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = k+1$

أي لنبرهن أن: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$f_1 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = f_2$$

محققة من أجل $(n = k+1)$ وبالتالي محققة من أجل $n \geqslant 1$

صفحة (21) ثانياً: أثبت ما يلي بطريقة الاستقراء الرياضي:

3) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

ثم استفد من ذلك في حساب مجموع السلسلة: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

الحل:

1) خطوة البداية: نثبت صحتها من أجل $n=1$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \\ f_2 &= 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1 = f_2$$

2) خطوة الاستقراء: نفرض صحة القضية من أجل $n=k$ ونثبت صحة القضية من أجل $n=k+1$، أي لنبرهن:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{k+2}$$

$$l_1 = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 - \left( \frac{(k+2)-1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

$$= 1 - \frac{\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}(k+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+2} = l_2$$

حساب المتسلسلة لأجل $n \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1$$

نلاحظ أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \cdots + \frac{1}{(n)(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

## صفحة 46 - تمارين -

$\frac{1}{46}$) استخدم طريقة الاستقراء الرياضي لإثبات ما يلي:

$$7 \mid f(n) = 2^{3n} - 1 \quad ; \quad (n \geq 1)$$

الحل:

1_ خطوة البداية: نثبت صحتها من أجل $n = 1$

$$n = 1 \Rightarrow 7 \mid f(1) = 2^{3(1)} - 1 = 8 - 1 = 7 \Rightarrow 7 \mid f(1) = 7$$

محققة

$$n = 2 \Rightarrow 7 \mid f(2) = 2^{3(2)} - 1 = 64 - 1 = 63 = (9)(7) \Rightarrow$$

$$7 \mid f(2)$$ محققة

2_ خطوة الاستقراء: نفرض صحة العلاقة من أجل $n = k$ أي أن

$7 \mid f(k) = 2^{3k} - 1$ محققة

ولنثبت صحتها من أجل $n = k+1$ أي لنثبت أن:

$$7 \overset{?}{\mid} f(k+1) = 2^{3(k+1)} - 1$$

بأخذ:

$$f(k+1) = 2^{3k+3} - 1$$
$$= 2^{3k} \cdot 2^{3} - 1$$
$$= 2^{3k}(7+1) - 1$$
$$= 7 \cdot 2^{3k} + 2^{3k} - 1$$
$$= 7 \cdot 2^{3k} + f(k)$$

ومنه نجد أن كل حد يقبل القسمة على 7 وبالتالي القضية محققة من أجل $k+1$ وبالتالي هي محققة من أجل $n \geq 1$

$15 \mid f(n) = 2^{4n} - 1 \quad ; \quad n \geq 0$

1) خطوة البداية: نثبت صحة القضية من أجل $n = 0$

$f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow 15 \mid f(0)$ محققة

من أجل $n = 1$

$\Rightarrow f(1) = 2^4 - 1 = 15 \Rightarrow 15 \mid f(1) = 15$ محققة

2) خطوة الاستقراء: نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n = k$

أي: $15 \mid f(k) = 2^{4k} - 1$ محققة $\Rightarrow 2^{4k} - 1 = 15M$

$\Rightarrow \boxed{2^{4k} = 15M + 1}$

ولنثبت أن العلاقة صحيحة من أجل $n = k+1$ أي لنثبت أن:

$15 \overset{?}{\mid} f(k+1) = 2^{4(k+1)} - 1$

لنأخذ:

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= 2^{4k+4} - 1 \\
&= 2^{4k} \cdot 2^4 - 1 \\
&= 16[15M + 1] - 1 \\
&= 16(15M) + 16 - 1 \\
&= 16(15M) + 15 \\
&= 15(16M + 1)
\end{aligned}
$$

ومنه $f(k+1)$ يقبل القسمة على 15 إذاً العلاقة صحيحة من أجل $n = k+1$ فهي صحيحة من أجل $n \geq 0$

$48^2 = 2304 \mid f(n) = 7^{2n+2} - 48n - 49 \quad ; \quad n \geq 0$

(وظيفة)

$\left(\frac{5}{46}\right.$ هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة، إن كانت صحيحة ما ثبت صحتها وإن كانت خاطئة أعط مثالاً يبين ذلك:

1) إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $a^2 \mid b.c$

$a \mid b \Longrightarrow \exists d_1 \in Z \; ; \; b = a.d_1$

$a \mid c \Longrightarrow \exists d_2 \in Z \; ; \; c = a.d_2$

$b.c = a^2.d_1 d_2$

$\Longrightarrow a^2 \mid b.c$ صحيحة.

2- $a \mid b \Longleftrightarrow ac \mid bc$ حيث $c \neq 0$

$a \mid b \Longrightarrow b = a.d \; ; \; d \in Z$

نضرب الطرفين بـ $c$ : $c.b = (c.a)\,d$

$ca \mid cb$ صحيحة.

3- إذا كان $a \mid b+c$ فإنه إما $a \mid b$ أو $a \mid c$

خاطئة ، مثال يبين ذلك:

$3 \mid 7+5 = 12 \Longleftarrow 3 \nmid 5 \; , \; 3 \nmid 7$