الخميس المحاضرة الثامنة 16/4/2015

الشبكة المعيارية : (ديدكند) :

لتكن $(L,\leq)$ شبكة . عندئذ :

1- L شبكة توزيعية اذا وفقط اذا تحقق :

$a,b,c\in L \;;\; a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

2- L شبكة معيارية اذا وفقط اذا تحقق :

$a,b,c\in L \;;\; a\geq b \;;\; a\wedge(b\vee c)=b\vee(a\wedge c)$

امثلة :

1 لتكن M مجموعة غير خالية عندئذ $(S(M),\subseteq)$ تشكل شبكة ((حيث $S(M)$ هي جميع اجزاء M وهي مجموعة مرتبة وفق علاقة الاحتواء)) وتكون هذه الشبكة توزيعية لأن :

$A,B,C\in S(M) : A\wedge(B\vee C)=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

2 كل شبكة توزيعية هي شبكة معيارية : لأن :

لتفرض أن L شبكة توزيعية ولتكن :

$a,b,c\in L : a\geq b : a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

$\boxed{a\geq b} = b\vee(a\wedge c) \Rightarrow$ L معيارية

3 لتكن G زمرة ما و لتكن $(N(G),\subseteq)$ شبكة جميع الزمر الجزئية الناظمية في G وهي شبكة معيارية لأن :

$A,B,C\in N(G) \;;\; B\subseteq A$

لنثبت أن : $A\wedge(B\vee C)\overset{?}{=}B\vee(A\wedge C)$

اي : $A\cap\langle B\cup C\rangle\overset{?}{=}\langle B\cup(A\cap C)\rangle$

الاجتماع ليس بالضرورة أن يكون زمرة لذلك نأخذ المولد بالاجتماع (زمرة مولدة بالاجتماع)

اي لنثبت أن : $A\cap B.C\overset{?}{=}B.(A\cap C)$

$$\left.\begin{array}{l} B\subseteq B.C \\ \text{ولدينا } B\subseteq A \end{array}\right\} B\subseteq A\cap B.C$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cap C\subseteq A \\ A\cap C\subseteq C\subseteq B.C \end{array}\right\} A\cap C\subseteq A\cap B.C$$

$$\Big\} (A\cap C)\cup B\subseteq A\cap B.C \;\Updownarrow\; (A\cap C).B\subseteq A\cap B.C \quad (*)$$

$$\forall x\in A\cap B.C \Rightarrow \begin{cases} x\in A \Rightarrow \exists a\in A : x=a \\ x\in B.C \Rightarrow \exists b\in B,\ c\in C \;;\; x=b.c \end{cases}$$

$\Longrightarrow x=a=\underset{\text{«}B\subseteq A\text{»}}{\underline{b}}.c\in A\cap C$

وتوضيح $c = a.b^{-1} \in A \Rightarrow a \in A ,\ b^{-1} \in B \subseteq A$ ، $c \in C \Rightarrow c \in A \cap C$

$$\left.\begin{array}{l} c = a.b^{-1} \in A \cap C \\ x = b.c \in B.(C \cap A) \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B.C \subseteq B.(C \cap A) \quad \cdots (**)$$

من (*) و (**) ينتج المطلوب . وبالتالي : $N(G)$ شبكة معيارية .

ملاحظة : اذا كانت احدى الزمرتين A , B ناظميتان عندئذ فان $A.B = B.A$ (الخاصة التبديلية) محققة على الزمر ، ليس كعناصر اي ليس بالضرورة ان يكون $a.b = b.a$ حيث $a \in A , b \in B$ عندها يكون $A \cup B = A.B$ اي عناصر اجتماع الزمرتين (عناصر المولدة بالاجتماع للمجموعات) هي من الشكل $a.b$

$\boxed{4}$ مثال معاكس عن شبكة معيارية وليست توزيعية :

اذا كانت لدينا الزمرة التبديلية التالية $G = \langle x_1 \rangle_2 \times \langle x_2 \rangle_2$

حيث $\langle x_i \rangle_2$ زمرة دوارة مولدة بـ x_i ومرتبتها 2 $[i = 1,2]$

نلاحظ ان الشبكة G . شبكة معيارية : بان G زمرة تبديلية فانها زمرة ناظمية وبالتالي جميع الزمر الجزئية فيها تكون ناظمية . وبالتالي شبكة جميع الزمر الجزئية الناظمية في G تكون معيارية حسب المثال $\boxed{3}$.

لنثبت ان G شبكة ليست توزيعية :

لنأخذ : $a = \langle x_1 \rangle_2 \quad , \quad b = \langle x_2 \rangle_2 \quad , \quad c = \langle x_1 . x_2 \rangle_2$

- $a \wedge (b \vee c) = \langle x_1 \rangle \cap \langle \langle x_1 \rangle \cup \langle x_1 . x_2 \rangle \rangle$
  $= \langle x_1 \rangle \cap G = \langle x_1 \rangle$
  نتيجة أولى .

$\langle x_1 \rangle_2 \times \langle x_2 \rangle_2 = \langle x_1 , x_2 \rangle_2 = \{ x_1 , x_2 , x_1 x_2 , e \} = G$

$\langle x_1 \rangle_2 \times \langle x_1 x_2 \rangle_2 = \langle x_1 , x_1 x_2 \rangle = \{ x_1 , x_1 x_2 , x_2 , e \} = G$

NB

$x_1 . x_1 x_2 = x_1^2 . x_2 = e . x_2$

- $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = \langle \langle x_1 \rangle \cup \langle x_2 \rangle \rangle \cap \langle \langle x_1 \rangle \cup \langle x_1 . x_2 \rangle \rangle$
  $= G \cap G = G$
  نتيجة ثانية

اذا نجد ان $a \wedge (b \vee c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

وبالتالي G شبكة غير توزيعية .

/ /

مبرهنة : لتكن $(L, \vee, \wedge)$ شبكة عندئذ القضايا التالية متكافئة :

1- L شبكة معيارية .

2- $a, b, c \in L : b \leq a \,,\; a \wedge c = b \wedge c \,,\; c \vee b = a \vee c \Longrightarrow a = b$

البرهان :

$1 \Rightarrow 2$

$$a \underset{\text{قانون الامتصاص}}{=} a \wedge (a \vee c) \underset{\text{الفرض (2)}}{=} a \wedge (b \vee c) \underset{\text{الفرض L معيارية}}{=} b \vee (a \wedge c) \underset{\text{الفرض (2)}}{=} b \vee (b \wedge c) \underset{\text{الامتصاص}}{=} b$$

$2 \Rightarrow 1$ لنثبت أن الشبكة L معيارية أي لنثبت أن الشرط التالي محقق :

$$a, b, c \in L : \quad a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

- من جهة أولى نلاحظ أن :

$b, a, c \in L$ ، فرضاً $b \leq a$ ولدينا $a \wedge c \leq a$ $\Big\}$ $b \vee (a \wedge c) \leq a$

$b \leq b \vee c$ و $a \wedge c \leq c \leq b \vee c$ $\Big\}$ $b \vee (a \wedge c) \leq b \vee c$

$\Big\}$ $b \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ ⊛

- من جهة ثانية : بالاستفادة من الفرض a ما يحقق المساواة مع شرط الشبكة المعيارية :

$$\underbrace{b \vee (a \wedge c)}_{\text{سوف تلعب دور } b} \leq \underbrace{a \wedge (b \vee c)}_{\text{سوف تلعب دور } a} \quad *$$

بالفرض (2) .

كي تكون المساواة محققة نتأكد من صحة العلاقتين :

$(b \vee (a \wedge c)) \wedge c = (a \wedge (b \vee c)) \wedge c$ ⊙

$(b \vee (a \wedge c)) \vee c = (a \wedge (b \vee c)) \vee c$ ⊙

أولاً نثبت :

$$(a \wedge (b \vee c)) \wedge c \underset{\text{التجميعي}}{=} a \wedge ((b \vee c) \wedge c) \underset{\text{حسب الامتصاص}}{=} a \wedge c \quad \ldots\ldots \boxed{1}$$

$$a \wedge c \underset{\text{حسب ⊛} = \boxed{1}}{\geq} (b \vee (a \wedge c)) \wedge c \geq (a \wedge c) \wedge c = a \wedge c$$

$b \vee (a \wedge c) = \sup\{b, a \wedge c\}$

$b \vee (a \wedge c) \geq a \wedge c$

$$\longrightarrow \quad (b \vee (a \wedge c)) \wedge c = a \wedge c \quad \ldots \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ نجد أن $\quad (a \wedge (b \vee c)) \wedge c = (b \vee (a \wedge c)) \wedge c \quad \ldots \boxed{3}$

بقي اثبات أن: $[a\cap(b\cup c)]\cup c = [b\cup(a\cap c)]\cup c$

اسابق اثباتنا بنفس الاسلوب السابقة أو يتم اثباتها بتطبيق مبدأ الثنوية على $\boxed{3}$

وذلك بتبديل كل:

(كل a بـ b) أي كل b بـ a و كل $\vee$ بـ $\wedge$ و كل $\wedge$ بـ $\vee$ وكل $\leq$ بـ $\geq$

" حيث أن $a\geq b$ لا تتغير ".

وبالتالي العلاقة التالية:

$\boxed{4}$ ..... $[b\cup(a\cap c)]\cup c = [a\cap(b\cup c)]\cup c \quad ; \quad a\geq b$

من العلاقتين $\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ و $\boxed{4}$ نجد أن:

$$b\vee(a\wedge c) = a\wedge(b\vee c)$$

ومنه الشبكة L معيارية.

مبرهنة: لتكن $(L,\vee,\wedge)$ شبكة فإن القضايا التالية متكافئة:

1- L شبكة معيارية.

2- $a\wedge[(a\wedge b)\vee c] = (a\vee b)\vee(a\wedge c) \quad : \quad a,b,c\in L$

الاثبات:

$\underline{1\Rightarrow 2}$

$$\underbrace{a\wedge b}\leq \underbrace{b} \Rightarrow \underbrace{a}\wedge[\underbrace{(a\wedge b)}\vee c] = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

الشبكة معيارية.

$\underline{2\Rightarrow 1}$

$a,b,c\in L \quad : \quad b\leq a \Rightarrow b=a\wedge b \ \& \ a=a\vee b \quad \circledast$

لدينا من الفرض: $a\wedge[(a\wedge b)\vee c] = (a\vee b)\vee(a\wedge c)$

$$a\wedge(b\vee c) = b\vee(a\wedge c) \quad \circledast$$

وبالتالي L شبكة معيارية.

ملاحظة:

$\boxed{1}$ اذا كان $a\geq b$ فإن العلاقة التالية $a\wedge(b\vee c)\geq b\vee(a\wedge c)$

محققة في اي شبكة. ((تم اثباتها في المبرهنة ما قبل السابقة)).

وبالتالي: نقول:

L شبكة معيارية $\Leftrightarrow$ $a\wedge(b\vee c)\leq b\vee(a\wedge c)$

هذا الشرط كافي لاثبات ان الشبكة معيارية.

$\boxed{2}$ كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية هي شبكة توزيعية.

كل شبكة جزئية من شبكة معيارية هي شبكة معيارية.

- لكن هل كل شبكة جزئية من شبكة تامة هي شبكة تامة ؟؟!

لا لا: لم نعرف صفة التمام على البنية الجبرية) والتمام معرف بدلالة inf, sup اي يجب ان يكون يوجد علاقة ترتيب

إذاً ليس بالضرورة أن تكون شبكة جزئية من شبكة تامة أيضاً شبكة تامة.

مبرهنة: إذا كانت $(L,\vee,\wedge)$ معيارية ولتكن $(M,\vee,\wedge)$ شبكتان ما ولدينا $\varphi: L \longrightarrow M$ تماثلاً شبكياً عندئذ فإن M تكون شبكة معيارية.

الإثبات: لتكن $x, y, z \in M \ : \ x \geq y$

لكي يتم المطلوب نبرهن أن: $x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z)$

عندئذ كون φ تماثل شبكي أي هو غامر أي:

$\exists\, a,b,c \in L \ ; \ \varphi(a) = x \ , \ \varphi(b) = y \ , \ \varphi(c) = z$

$x \geq y \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$ وكون φ تماثل شبكي

$\Rightarrow a \geq b$

ولأن L شبكة معيارية فإن:

$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$

ولأن φ تماثل شبكي (معرف على بنى جبرية) فإن:

لو كان φ تماثل مرتبة كان الكلام غير صحيح لأنه يحافظ على علاقة الترتيب والمساواة

$\varphi(a \wedge (b \vee c)) = \varphi(b \vee (a \wedge c))$

$\Rightarrow \varphi(a) \wedge (\varphi(b) \vee \varphi(c)) = \varphi(b) \vee (\varphi(a) \wedge \varphi(c))$

$x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z)$

عندئذ M شبكة معيارية.

التماثل بالحالة العامة يحافظ على الخواص النقطية والتبولوجية ...... مثلاً تماثل الفضاءات الشعاعية والزمر والحلقات ... ونلاحظ أن التماثل الشبكي أيضاً يحافظ على نفس الخواص.

التماثل ينقل جميع الصفات معاً حيث $\varphi(L) = M$ نقل عناصر وصفات، أما التقابل لا ينقل صفات إنما ينقل لنا نقاط مثلاً تقابل مستقيم مستوي.

تعريف: الشبكة الجزئية المعرفة بـ a,b:

لتكن $(L,\vee,\wedge)$ شبكة ما و $a,b \in L$ بحيث تحققان $a \leq b$ عندئذ نعرف الشبكة الجزئية من L المعرفة بـ a,b بالشكل: $\{x \in L : a \leq x \leq b\}$ ونرمز لها بالشكل b/a

واضح أن المجموعة السابقة شبكة جزئية لأن ① $a \in L$ حيث $a \in \frac{b}{a}$ أي $L \supseteq \frac{b}{a} \neq \phi$

② $x, y \in \frac{b}{a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \leq x \wedge y \leq b \\ a \leq x \vee y \leq b \end{array}$ ومنه $x \vee y \ , \ x \wedge y \in L$ أي $\frac{b}{a}$

أي $\frac{b}{a}$ شبكة جزئية في L.

مثال: $L = ([-1,1], \leq)$ شبكة تامة ولتكن $H = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\} \cap \mathbb{R}^*$ هي شبكة جزئية لكنها ليست تامة لأن $\inf H = 0 \notin H =]0,1]$

حيث H مجموعة جزئية من نفسك.

31

Finished Lecture...