1 / 3 / 2015

المحاضرة الخامسة

تمثيل زمرة على فضاء شعاعي :

مقدمة : $V(F)$ فضاء شعاعي منتهي البعد على حقل F و $GL(V)$ مجموعة كل المؤثرات الخطية القلوبة من V الى V ؛ وهي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات :

$$(f.g)v = f(g(v)) \; ; \; \forall v \in V$$

G زمرة ما (جزئية في الحالة العامة).

تعريف : لتكن G زمرة ما ، V فضاء شعاعي منتهي البعد على حقل F ، نعرف تمثيل الزمرة G على الفضاء V بأنه تشاكل -

$$T : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longmapsto T_g$$

يسمى هذا التمثيل بالتمثيل الخطي لـ G على F

نلاحظ ان $T_g : V \longrightarrow V$ مؤثر خطي ويكفي لتعيين هذا المؤثر أن نعين (صورة عناصر قاعدة ما اي معرفة ... اي عنصر).

اي : $T_g(v_i)$; $i = 1, \dots, n$ حيث $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ اساس (قاعدة) في V ،

كان المؤثر T_g يعين بمصفوفة بالنسبة الى اساس ما .

حيث ان كل مؤثر خطي $f : V \longrightarrow V$ يعين مصفوفة وحيدة ولتكن $M = mat(f, SS)$

وهنالك تقابل بين مجموعة المؤثرات (التطبيقات) الخطية ، وفضاء المصفوفات المربعة من المرتبة n اي : على فضاء V بعده n .

$$L(V) \cong M_n(F)$$ $f : V \longrightarrow V$ مؤثر تقابل ⟸ f تحت ... f عامر

وبالتالي :

$$\ast \quad GL(V) \cong GL(n, F)$$

حيث : $GL(n, F)$ فضاء المصفوفات المربعة القلوبة على الحقل F وهي زمرة بالنسبة الى عملية ضرب المصفوفات تسمى الزمرة الخطية من المرتبة n .

وبذلك يمكن تعريف تمثيل زمرة G على حقل F بأنه تشاكل زمري

$$T : G \longrightarrow GL(n, F)$$
$$g \longmapsto \mathbb{T}_g$$ ⟶ رمز للمصفوفة

يسمى هذا التمثيل بالتمثيل المصفوفاتي للزمرة G على حقل F من الدرجة n -

n - درجة التمثيل .

حسب $\ast$ كل تمثيل خطي لزمرة G يعين تمثيلاً مصفوفاتياً لهذه الزمرة والعكس صحيح.

ولذلك احياناً نتعامل مع التمثيل بلغة المؤثرات الخطية واحياناً بلغة المصفوفات

تذكرة ❀ ليكن $f : V \longrightarrow V$ و $g : W \longrightarrow W$ نقول يكون f و g متشابهين بحيث يكونا معرفين على فضائين لهما البعد نفسه اذا وجد تقابل $\rho : V \longrightarrow W$ بحيث يجعل المخطط تبديلي

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

$$\rho \circ f = g \circ \rho$$
$$g = \rho \circ f \circ \rho^{-1}$$

لا يمكن ايجاد ρ اذا ما كان V, W من نفس البعد .

تعريف : اذا كان $T : G \longrightarrow GL(V)$ و $R : G \longrightarrow GL(W)$ تمثيلين للزمرة G على فضائيين V و W على الترتيب . نقول عن التمثيلين T و R انهما متماثلين (متكافئين) . $R \sim T$ اذا وجد تقابل خطي $\rho : V \longrightarrow W$ يجعل المخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_g"] \arrow[d, "\rho"'] & V \arrow[d, "\rho"] \\ W \arrow[r, "R_g"'] & W \end{tikzcd}$$

$$\rho \circ T_g = R_g \circ \rho \ , \ \forall \ g \in G$$

وهذا يكافئ

$$R_g = \rho \circ T_g \circ \rho^{-1} \quad \forall g \in G$$

نلاحظ مباشرة ، انه اذا كان $Dim\, W \neq Dim\, V$ فان $R \not\sim T$

ملاحظة : ان مفهوم تماثل التمثيلات بلغة المصفوفات ان T_g و R_g متكافئتين : اذا كان $R_g = P \cdot T_g \cdot P^{-1} \ ; \forall g \in G$

Finished Lecture...