

الماضرة الخامسة

تمثيل زمرة غال في فضاء شعاعي :

مقدمة : $V(F)$ فضاء شعاعي متتهي البعد على حقل F و $GL(V)$ مجموعة كل المؤثرات الخطية المتلوية من V الى V ؛ وهي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات : $v \in V \Rightarrow v \circ g = f(g(v)) ; (f, g) \in G$ زمرة ما (خربية على الحالة العامة) .

تعريف : لنكن G زمرة ما ، V فضاء شعاعي متتهي البعد على حقل F ، نعرف تمثيل الزمرة G على الفضاء V بأنه تناك $T : G \rightarrow GL(V)$

يسمى هذا التمثيل بالتمثيل الخطي لـ G على F $g \mapsto T_g$

نلاحظ ان $T : V \rightarrow V$ مؤثر خطي ويكون لقيمت هذا المؤثر ان قيمته (صورة عناصر قاعدة ما اي صورة اي عنصر) .

اي : $n = 1, \dots, n$: $T_g(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(g) v_j$ حيث (v_i) اساس (قاعدة) على V .

تمايز المؤثر T_g يمين بمصفوفته بالنسبة الى اساس ما .

حيث ان كل مؤثر خطي $P : V \rightarrow V$ يمين بمصفوفة $M = mat(P, S, S)$ و يمكن

وهناك تقابل بين مجموعة المؤثرات (التطبيقات) الخطية و فضاء المصفوفات المربعة من الرتبة n اي : \leftarrow كل فضاء V بعده n .

$$L(V) \cong M_n(F)$$

وبالتالي : $GL(V) \cong GL(n, F)$ *

حيث : $GL(n, F)$ فضاء المصفوفات المربعة القلوية على الحقل F وهي زمرة

بالنسبة الى عملية ضرب المصفوفات ضمن الزمرة الخطية من الرتبة n .

وبذلك يمكن تعريف تمثيل زمرة G على حقل F بأنه تناك زمري

$$T : G \rightarrow GL(n, F)$$

زمري للمصفوفة $g \mapsto T_g$

يسمى هذا التمثيل بالتمثيل المصفوفاتي للزمرة G على حقل F من الرتبة n .

مهمة * : ان تمثيل حقيقي للزمرة G يمين تمثيلاً مصفوفاتي للزمرة واللكر جميع

ولذلك احياناً نتعامل مع التمثيل للتمثيلات الخطية و احياناً بلغة المصفوفات

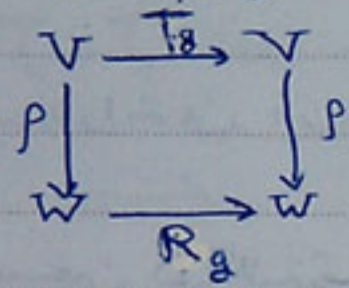
تذكرة * : ليكن $P : V \rightarrow V$ و $Q : W \rightarrow W$ و R الذي يكون P و Q متشابهين حيث يكونا مصفوفتين على

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{P} & V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ W & \xrightarrow{Q} & W \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{حيث يعمل التمثيل} \\ \varphi \circ P = Q \circ \psi \\ \psi \circ \varphi = P \circ \psi \\ \psi \circ \varphi = Q \circ \psi \end{array}$$

لا يمكن اليا د م اذا ما كان

V, W من نفس البعد

تعريف: إذا كان $T: G \rightarrow GL(V)$ و $R: G \rightarrow GL(W)$ تمثيلين للزمرة G على فضاءين V و W على المرتبة n . نقول عن التمثيلين T و R انهما متماثلين (متكافئين) إذا وجد تقابل خطي $P: V \rightarrow W$ يبدل المفضة



الناتج تبليبي: $P \circ T_g = R_g \circ P, \forall g \in G$

وهذا يكافئ $R_g = P \circ T_g \circ P^{-1}, \forall g \in G$

ولذلك مستحتمة، انه اذا كان $\dim W \neq \dim V$ فان $R \not\sim T$

ملاحظة: ان مفهوم تماثل التمثيلات بلغة المصفوفات ان $R_g \sim T_g$ متكافئين اذا كان $R_g = P \cdot T_g \cdot P^{-1}, \forall g \in G$

Finished Lecture...