المحاضرة الخامسة ..

.. 2015 / 3 / 29

النموذج غير المتوازن :

نميز حالتين :

١- عجز في الإنتاج : أي $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$

في هذه الحالة نضيف مركز إنتاج وهمي، طاقته الإنتاجية تساوي

$$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1} \,.$$

إذاً تكون طاقات الإنتاج لمراكز الإنتاج $a_1, a_2, ---, a_m, a_{m+1}$

وفي هذه الحالة يصبح النموذج نموذج متوازن

أي : $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$

وعليه نكتب النموذج بالشكل التالي :

$$L = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

(1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = \overline{1:m+1}$

أي : $x_{11} + x_{12} + -- + x_{1n} = a_1$

$\vdots$

$x_{m+1\,1} + x_{m+1\,2} + -- + x_{m+1\,n} = a_{m+1}$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j=\overline{1:n}$$

أي:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m+11} = b_1$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{m+1n} = b_n$$

$$(3)\quad x_{ij} \geqslant 0 \quad ; \quad i=\overline{1;m+1}, \quad j=\overline{1:n}$$

تكون كلفة النقل من المركز الإنتاجي الوهمي الذي أضفناه إلى جميع المراكز الاستهلاكية تساوي الصفر.

2. فائض في الإنتاج:

في هذه الحالة تكون: $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$

نضيف مركز استهلاكي وهمي حاجته هي $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$

وتكون تكلفة النقل من جميع المراكز الإنتاجية إليه تساوي الصفر.

وعليه نكتب النموذج بالشكل التالي:

$$L = \sum_{i=}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow Min$$

وفق الشروط:

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i=\overline{1:m}$$

(2) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \; j = \overline{1 : n+1}$$

(3) $$x_{ij} \geqslant 0 \quad ; \; i = 1 : m$$
$$j = 1 : n+1$$

نموذج نقل المواد بأقصر فترة زمنية :

يختلف هذا النموذج عن النماذج السابقة بأنه يهدف إلى نقل كامل الكميات من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك بأقصر فترة زمنية ممكنة و نصادف مثل هذه المسائل عند وضع خطط لنقل مواد سريعة العطب كالحليب أو الأدوية أو الأغذية ... الخ

وكذلك عند وضع خطط لتأمين الذخائر في حالة الحرب حيث يكون الهدف هو النقل بأسرع ما يمكن و أقل كلفة ممكنة .

نصيغ المسألة والنموذج كالتالي :

نص المسألة :

لنفرض أنه لدينا m مركز لتصدير مادة ما و أن طاقات تلك المراكز محدودة بالكميات $a_1, \dots, a_m$ و أنه لدينا n مركزاً استهلاكياً و أن متطلباتها محددة من تلك المادة بالكميات $b_1, \dots, b_n$ ولنفرض أن

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

كما نفرض أن مصفوفة الأزمنة اللازمة لنقل الكميات المتوفرة من المركز i إلى المركز j معلومة و تساوي $[t_{ij}]$ ، و إذا رمزنا لمقدار ما يجب نقله من المركز i إلى المركز j بالرمز x_{ij} فإننا نجد أن هذه المتحولات يجب أن تحقق الشروط :

(1) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \; i = \overline{1 : m}$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; \quad j = \overline{1:n}$$

$$(3) \qquad x_{ij} \geqslant 0 \quad ; \quad i = \overline{1:m}, \; j = \overline{1:n}$$

أما تابع الهدف فلا عكن استخلاصه على شكل تابع رياضي ولكننا نستخلص أهم صفاته وخواصه، نعلم أنّ أي خطة لنقل x_{ij} يوجد جملة من الأعداد والأزمنة نرمز لها بالرمز $[t_{ij}]_x$ وهي تمثل المدة الزمنية المقابلة لتنفيذ عناصر الخطة $[x_{ij}]$ وبما أنّ الخطة $[x_{ij}]$ لا تعتبر منفذة إلا إذا كانت نُفذت عناصرها

وبذلك نجد أنّ مدة تنفيذ الخطة والتي نرمزلها بـ t_x تساوي أكبر عنصر في الجملة $[t_{ij}]_x$ وعليه تكون:

$$t_x = \max_{ij} [t_{ij}]_x$$

وبما أنه لدينا عدد كبير من الخطط القاعدية فإنّ الخطة المثالية:

$$t_x^{\star} = \min \left[\max_{ij} [t_{ij}]_x \right]$$

هنا نمثل تابع الهدف

تمرين (١):

نريد نقل 6 أطنان من الحليب من المعمل A و 3 أطنان من المعمل B إلى ثلاثة مدن c, d, e حاجاتها على الترتيب 4, 2, 3 أطنان.

أوجد الخطة المثالية من حيث التكلفة لنقل هذه الكميات إلى المراكز الاستهلاكية علماً بأنّ مصفوفة التكاليف هي:

$$ن ج = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

تمرين (2):

لدينا 4 مراكز إنتاجية و 3 مراكز استهلاكية وأن الكميات والأزمنة اللازمة للنقل من مراكز الانتاج إلى مراكز الاستهلاك معطاة بالجدول التالي وكذلك الكميات المتوفرة والكميات المطلوبة.

مراكز استهلاك / مراكز انتاج	1	2	3	الكميات المتوفرة
1	1	2	6	11
2	3	8	1	9
3	7	10	4	13
4	12	8	5	7
الكميات المطلوبة	18	10	12	

تمرين (3):

لدينا 5 مشاريع B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 تتزود بالمواد الأولية من 3 مصانع A_1, A_2, A_3 حيث أن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع على التوالي 110,120,130 وحاجة كلاً من المشاريع على الترتيب 100,40,60,80,90 وكلفة النقل للوحدة الواحدة من المصنع i إلى المستودع j معطاة بالجدول:

المشاريع / المصانع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	الطاقة الإنتاجية
A_1	4	1	3	6	9	130
A_2	5	2	6	4	8	120
A_3	6	4	2	5	7	110
الكميات المطلوبة	90	80	60	40	100	

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن

2- صياغة النموذج الرياضي في الحالة التي يكون فيها الطاقة الإنتاجية للمصنع A_3 هي 120.

مسألة الاسناد (التعيين):

تهتم هذه النماذج بالاسناد الأفضل لمختلف الموارد الاقتصادية والانتاجية على مختلف الأعمال المراد إنجازها.

تمتاز هذه المسائل ببساطة معالجتها على عكس مسائل النقل، في معظم هذه المسائل عادةً تتساوى الأعمال المراد إنجازها مع عدد الموارد، وأيضاً تابع الهدف يمكن أن يأخذ max أو min.

لنفرض أننا نريد توزيع n عامل (آلة) على n عمل بحيث يقوم كل عامل بإنجاز عمل واحد فقط وبحيث يكون إجمالي الانتاج لهم أكبر ما يمكن وذلك ضمن الانتاجية المحددة لكل منهم.

نرمز c_{ij} لإنتاج العامل i من العمل j ، نحصل على المصفوفة الإنتاجية التالية :

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11}, & \cdots, & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1}, & \cdots, & c_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث أنّ هذه المصفوفة يمكن أن تكون معبرة عن تكاليف العمل بدلاً من الإنتاج

صياغة النموذج الرياضي :

نرمز x_{ij} للمتحول الذي يأخذ قيمة تساوي 1 عندما نعين العامل i في العمل j

ويأخذ القيمة 0 عندما يكون عكس ذلك .

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11}, & \cdots, & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}, & \cdots, & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

بما أنّ العامل الواحد لا يمكن أن يأخذ إلا عملاً واحداً فهذا يعني أنّ واحداً فقط من المتحولات x_{ij} في السطر i سيأخذ قيمة تساوي الواحد أما بقية المتحولات في ذلك السطر ستأخذ قيماً تساوي الصفر وبما أنّ العمل الواحد لا يمكن أن يُنفذ إلا من قبل عامل واحد فهذا يعني أنّ واحداً فقط من المتحولات x_{ij} في العمود j سيأخذ قيمة تساوي 1 أما بقية المتحولات في ذلك العمود ستأخذ القيمة 0

/ /

صياغة النموذج الرياضي:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, x_{ij} \rightarrow Max$$

ضمن الشروط:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$(3) \quad x_{ij} = 0 \quad \text{أو} \quad x_{ij} = 1$$

$j = \overline{1:n}$ و $i = \overline{1:n}$ و

مسألة:

لنفرض أنه لدينا ثلاثة أعمال A_1, A_2, A_3 وثلاث آليات B_1, B_2, B_3
كل عمل عكن أن ينجز وبشكل كامل باستخدام أي آلة من الثلاث
الثلاثة وبالمقابل كل آلة عكن أن تنجز أي من الأعمال الثلاث
المطلوبة، والمطلوب:
تخصيص هذه الآلية للأعمال الموجودة بحيث نحصل على الإسناد الأمثل
أي الإسناد الذي يعطينا التكلفة الكلية الدنيا علماً بأن تكاليف هذه
الأعمال (وهي متعلقة بأداء كل عمل) مبينة في الجدول التالي وكل آلة
مخصصة لأداء عمل واحد وكل عمل ينجز بواسطة آلة واحدة فقط وعليه
فإن عدد الآليات يساوي عدد الأعمال.
صغ النموذج الرياضي
(ارسم جدول بالقيم التي تختارها).

انتهت المحاضرة