حلول عددية

المحاضرة السادسة

٢٠١٥/٣/٣٠

4 طريقة ثيتا (θ) :

وهي عبارة عن تعميم لطريقة كرانك نيكلسون ، أي أننا نحسب قيمة u عند النقطة التي إحداثياتها $(i, j+\frac{1}{2})$ ، ولكن بأخذ المقدار التالي بدلاً من المتوسط الحسابي بالنسبة للمسافة :

$$u_{xx}(i, j+\tfrac{1}{2}) = (1-\theta)\,\frac{u_{i+1}^{j} - 2u_{i}^{j} + u_{i-1}^{j}}{h^2} + \theta\,\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_{i}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

حيث $0 \leq \theta \leq 1$

بينما سنأخذ طريقة الفروق المركزية كما في كرانك - نيكلسون بالنسبة للزمن .

ومنه بالتعويض في معادلة الحرارة : $u_t = u_{xx}$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j}}{k} = (1-\theta)\,\frac{u_{i+1}^{j} - 2u_{i}^{j} + u_{i-1}^{j}}{h^2} + \theta\,\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_{i}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

ملاحظة :

- عندما $\theta = 0$ $\Leftarrow$ نحصل على الطريقة الظاهرية .
- عندما $\theta = 1$ $\Leftarrow$ نحصل على الطريقة الضمنية .
- عندما $\theta = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ نحصل على طريقة كرانك - نيكلسون .

ومنه فإن طريقة ثيتا هي تعميم للطرق الثلاثة المذكورة سابقاً .

/ /

لنفرض $\lambda = \frac{k}{h^2}$ فنجد:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \lambda(1-\theta) u_{i+1}^j - 2\lambda(1-\theta) u_i^j + \lambda(1-\theta) u_{i-1}^j + \lambda\theta u_{i+1}^{j+1} - 2\lambda\theta u_i^{j+1} + \theta\lambda u_{i-1}^{j+1}$$

$$(1+2\lambda\theta) u_i^{j+1} - \lambda\theta u_{i+1}^{j+1} - \lambda\theta u_{i-1}^{j+1} = \lambda(1-\theta) u_{i+1}^j + (1-2\lambda(1-\theta)) u_i^j + \lambda(1-\theta) u_{i-1}^j$$

وهي معادلة الفروق المنتهية.

* دراسة استقرار طريقة تيتا:

لنفرض أن الحل عند النقاط الداخلية هو من الشكل الأسي، أي:

$$u_i^j = w_j e^{r x_i I} \quad ; \quad I = \sqrt{-1}$$

نعوض في معادلة الفروق فنجد:

$$(1+2\lambda\theta) w_{j+1} e^{r x_i I} - \lambda\theta w_{j+1} e^{r x_{i+1} I} - \lambda\theta w_{j+1} e^{r x_{i-1} I} = \lambda(1-\theta) w_j e^{r x_{i+1} I} + (1-2\lambda(1-\theta)) w_j e^{r x_i I} + \lambda(1-\theta) w_j e^{r x_{i-1} I}$$

$$\left[(1+2\lambda\theta) e^{r x_i I} - \lambda\theta e^{r x_i I} . e^{r h I} - \lambda\theta e^{r x_i I} . e^{-r h I}\right] w_{j+1} = \left[\lambda(1-\theta) e^{r x_i I} . e^{r h I} + (1-2\lambda(1-\theta)) e^{r x_i I} + \lambda(1-\theta) e^{r x_i I} . e^{-r h I}\right] w_j$$

بتقسيم طرفي المعادلة على $e^{r x_i I}$:

$$\left[(1+2\lambda\theta) \underbrace{- \lambda\theta e^{r h I} - \lambda\theta e^{-r h I}}\right] w_{j+1} = \left[\underbrace{\lambda(1-\theta) e^{r h I}} + (1-2\lambda(1-\theta)) + \underbrace{\lambda(1-\theta) e^{-r h I}}\right] w_j$$

$$\left[1+2\lambda\theta - 2\lambda\theta \cos(rh)\right] w_{j+1} = \left[1-2\lambda(1-\theta) + 2\lambda(1-\theta)\cos(rh)\right] w_j$$

$$\left[1+2\lambda\theta(1-\cos(rh))\right] w_{j+1} = \left[1-2\lambda(1-\theta)(1-\cos(rh))\right] w_j$$

لنضع $a = \frac{rh}{2}$ فنجد:

$$[1+4\lambda\theta\sin^2 a]\, w_{j+1} = [1-4\lambda(1-\theta)\sin^2 a]\, w_j$$

$$\Rightarrow \frac{w_{j+1}}{w_j} = \frac{1-4\lambda(1-\theta)\sin^2 a}{1+4\lambda\theta\sin^2 a} = G$$

حتى تكون الطريقة مستقرة يجب أن يكون $|G| \leq 1$ أي:

$$\left|\frac{1-4\lambda(1-\theta)\sin^2 a}{1+4\lambda\theta\sin^2 a}\right| \leq 1 \iff \underset{②}{-1 \leq} \frac{1-4\lambda(1-\theta)\sin^2 a}{1+4\lambda\theta\sin^2 a} \underset{①}{\leq 1}$$

① : $1-4\lambda(1-\theta)\sin^2 a \leq 1+4\lambda\theta\sin^2 a$

$\Rightarrow 1+4\lambda\theta\sin^2 a - 4\lambda\sin^2 a \leq 1+4\lambda\theta\sin^2 a$. وهذا محقق دوماً

② : $-(1+4\lambda\theta\sin^2 a) \leq 1-4\lambda(1-\theta)\sin^2 a$

$$-2-4\lambda\theta\sin^2 a + 4\lambda\sin^2 a - 4\lambda\theta\sin^2 a \leq 0$$

$$-2-8\lambda\theta\sin^2 a + 4\lambda\sin^2 a \leq 0$$

$$1+4\lambda\theta\sin^2 a - 2\lambda\sin^2 a \geq 0$$

بما أن $0 \leq \sin^2 a \leq 1$ إذن يمكن تكبير المقدار في الطرف الأيسر ،

$$1+4\lambda\theta - 2\lambda \geq 0 \Rightarrow 1+2\lambda(2\theta-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 \geq 2\lambda(1-2\theta) \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k \leq \frac{h^2}{2(1-2\theta)}}$$

وهو شرط فورييه الاستقراري .

ملاحظة: لنعوض $\theta = \frac{1}{2}$ في الشرط الاستقراري فنجد: $\lambda \leq \infty$ ، وهذا محقق دوماً
وهنا يتطابق مع نتائج دراسة استقرار طريقة كرانك - نيكلسون غير مشروطة الاستقرار .

5 طريقة Leap Frog :

سوف نستخدم هنا طريقة الفروق المركزية لكل من المسافة والزمن :

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} \quad , \quad u_{xx} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

نعوض في معادلة الحرارة ،

$$u_t = u_{xx}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + \frac{2k}{h^2}\left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right]$$

نضع $\lambda = \frac{k}{h^2}$:

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + 2\lambda\left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right]$$

وهي معادلة الفروق المنتهية.

* دراسة استقرار طريقة Leap Frog :

لنفرض أن للحل الشكل الأسي أي :

$$u_i^j = w_j e^{r x_i I} \quad ; \quad I = \sqrt{-1}$$

نعوض في معادلة الفروق فنجد :

$$w_{j+1} e^{r x_i I} = w_{j-1} e^{r x_i I} + 2\lambda\left[e^{r x_{i+1} I} - 2e^{r x_i I} + e^{r x_{i-1} I}\right] w_j$$

$$w_{j+1} e^{r x_i I} = w_{j-1} e^{r x_i I} + 2\lambda\left[e^{r x_i I} e^{rhI} - 2e^{r x_i I} + e^{r x_i I} \cdot e^{-rhI}\right] w_j$$

نقسم الطرفين على $e^{r x_i I}$:

$$w_{j+1} = w_{j-1} + 2\lambda\left[e^{rhI} + e^{-rhI} - 2\right] w_j$$

/ /

$G = \frac{w_{j+1}}{w_j} = \frac{w_j}{w_{j-1}}$ نقسم الطرفين على w_j ، ونضع :
ونضع أيضاً $\theta = rh$ فيكون :

$$G = \frac{1}{G} + 2\lambda\left[2\cos\theta - 2\right]$$

$$G = \frac{1}{G} - 4\lambda\left[1 - \cos\theta\right] = \frac{1}{G} - 8\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}$$

نضع $p = \sin^2\frac{\theta}{2}$ ، ونضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ G فنجد :

$\boxed{G^2 + 8\lambda p G - 1 = 0}$ وهي معادلة من الدرجة الثانية

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64\lambda^2 p^2 + 4 = 4(16\lambda^2 p^2 + 1) > 0$$

ومنه للمعادلة جذرين حقيقيين :

$$G_{1,2} = \frac{-8\lambda p \mp 2\sqrt{16\lambda^2 p^2 + 1}}{2} = -4\lambda p \mp \sqrt{16\lambda^2 p^2 + 1}$$

لنفرض جدلاً أن : $|G_2| \leqslant 1$ عندئذٍ :

$$\left|-4\lambda p - \sqrt{16\lambda^2 p^2 + 1}\right| \leqslant 1 \iff -1 \overset{①}{\leqslant} -4\lambda p - \sqrt{16\lambda^2 p^2 + 1} \overset{②}{\leqslant} 1$$

$$①: \sqrt{16\lambda^2 p^2 + 1} \leq 1 - 4\lambda p \Rightarrow 16\lambda^2 p^2 + 1 \leqslant 16\lambda^2 p^2 - 8\lambda p + 1$$

وهذا غير مقبول لأننا لو افترضنا على سبيل المثال $\theta = \pi$ فيكون $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$
وسيصبح $p = \sin^2\frac{\theta}{2} = 1$ وستصبح المتراجحة الأخيرة بالشكل :

$$16\lambda^2 + 1 \leq 16\lambda^2 - 8\lambda + 1$$

وهذا غير منطقي ، وبالتالي وصلنا إلى تناقض والفرض الجدلي خاطئ .
ولا داعي لدراسة الجذر الآخر G_1 ، إذ يكفي ألا يحقق أحد الجذرين الشرط
حتى تكون الطريقة غير مستقرة
ومنه فإن طريقة Leapfrog لحل معادلة الحرارة (المكافئة) غير مستقرة .

6 طريقة The Du Fort - FrankeL : DFF

تستخدم هذه الطريقة نفس طرق الفروق المتقدمة في طريقة Leap Frog ولكنها أكثر تطوراً لأنها تستخدم بالإضافة إلى ذلك المتوسط الحسابي:

$$u_i^j = \frac{1}{2}\left[u_i^{j+1} + u_i^{j-1}\right]$$

نعوض قوانين الفروق في معادلة الحرارة: $u_t = u_{xx}$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

والآن نعوض المتوسط الحسابي:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k} = \frac{u_{i+1}^j - (u_i^{j+1} + u_i^{j-1}) + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\Rightarrow u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + \frac{2k}{h^2}\left[u_{i+1}^j - u_i^{j+1} - u_i^{j-1} + u_{i-1}^j\right]$$

نضع: $\lambda = \frac{k}{h^2}$ فنجد:

$$(1+2\lambda)\, u_i^{j+1} = (1-2\lambda)\, u_i^{j-1} + 2\lambda\,(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j)$$

وهي معادلة الفروق المنتهية.

* دراسة استقرار طريقة The Du Fort - Frankel : DFF

لنفرض أن الحل له الشكل الأسي، أي:

$$u_i^j = w_j\, e^{r x_i I} \quad ; \quad I = \sqrt{-1}$$

نعوض في معادلة الفروق فنجد:

$$(1+2\lambda)\, w_{j+1}\, e^{r x_i I} = (1-2\lambda)\, w_{j-1}\, e^{r x_i I} + 2\lambda\,(e^{r x_{i+1} I} + e^{r x_{i-1} I})\, w_j$$

نقسم الطرفين على $e^{rx_i I}$:

$$(1+2\lambda)w_{j+1}=(1-2\lambda)w_{j-1}+2\lambda\left(e^{rhI}+e^{-rhI}\right)w_j$$

نضع $\theta=rh$ فيكون :

$$(1+2\lambda)w_{j+1}=(1-2\lambda)w_{j-1}+4\lambda\cos\theta\, w_j$$

نقسم الطرفين على w_j ونضع : $G=\frac{w_{j+1}}{w_j}=\frac{w_j}{w_{j-1}}$

$$\Rightarrow (1+2\lambda)G=(1-2\lambda)\frac{1}{G}+4\lambda\cos\theta$$

نضرب الطرفين بـ G فنجد :

$$\boxed{(1+2\lambda)G^2-4\lambda\cos\theta\, G-(1-2\lambda)=0}$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية .

$$\begin{aligned}\Delta=b^2-4ac&=16\lambda^2\cos^2\theta+4(1+2\lambda)(1-2\lambda)\\&=16\lambda^2\cos^2\theta+4(1-4\lambda^2)\\&=16\lambda^2\cos^2\theta+4-16\lambda^2\\&=16\lambda^2(\cos^2\theta-1)+4\\&=-16\lambda^2\sin^2\theta+4=4(1-4\lambda^2\sin^2\theta)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}$$

لا يمكننا الجزم فيما إذا كانت Δ موجبة أم سالبة، لذا علينا نناقش جميع الحالات :

$\boxed{1}$ $\Delta>0$ ، عندئذٍ لدينا جذران حقيقيان للمعادلة :

$$G_{1,2}=\frac{4\lambda\cos\theta\mp2\sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\theta}}{2(1+2\lambda)}=\frac{2\lambda\cos\theta\mp\sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\theta}}{1+2\lambda}$$

نعلم أنه :

$$\boxed{\begin{aligned}|a+b|&\le|a|+|b|\\|a-b|&\le|a|+|b|\end{aligned}}$$

$$|G_{1,2}| = \frac{|2\lambda\cos\theta \mp \sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\theta}|}{|1+2\lambda|} \leqslant \frac{|2\lambda\cos\theta| + |\sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\theta}|}{1+2\lambda}$$

$$|G_{1,2}| \leqslant \frac{2\lambda|\cos\theta| + \sqrt{1-4\lambda^2\sin^2\theta}}{1+2\lambda} \leqslant \frac{2\lambda+1}{1+2\lambda} = 1$$

ومنه فالطريقة مستقرة عندما $\Delta > 0$.

2 $\Delta < 0$ ، عندئذٍ يمكن كتابة Δ بالشكل :

$$\Delta = -4(4\lambda^2\sin^2\theta - 1) \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{4\lambda^2\sin^2\theta - 1}\; I$$

ويكون لدينا جذران عقديان :

$$G_{1,2} = \frac{4\lambda\cos\theta \mp 2\sqrt{4\lambda^2\sin^2\theta-1}\; I}{2(1+2\lambda)} = \frac{2\lambda\cos\theta \mp \sqrt{4\lambda^2\sin^2\theta-1}\; I}{1+2\lambda}$$

نعلم أن : $G.G^* = |G|^2$ حيث G^* هو مرافق العدد العقدي G

لنضرب الحلين G_1, G_2 المترافقين ببعضهما :

$$|G_1|^2 = |G_2|^2 = G_1.G_2 = \frac{4\lambda^2\cos^2\theta + 4\lambda^2\sin^2\theta - 1}{(1+2\lambda)^2} = \frac{4\lambda^2 - 1}{4\lambda^2+4\lambda+1} < 1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |G_1|^2 < 1 \Longrightarrow |G_1| < 1 \\ |G_2|^2 < 1 \Longrightarrow |G_2| < 1 \end{cases}$$

ومنه فالطريقة مستقرة عندما $\Delta < 0$.

مما سبق فإن طريقة DFF مستقرة أياً كانت قيمة λ

انتهت المحاضرة السادسة