نمذجة رياضية

المحاضرة العاشرة

١٣/٤/٢٠١٥م

# البرمجة الصحيحة

مسائل البرمجة الصحيحة هي مسائل برمجة لا خطية، ولكن يمكن تحويلها إلى خطية بالاستعانة بالمتحولات الصحيحة التي تأخذ حصراً إحدى القيمتين 0 أو 1 .
نوضح الفكرة الأساسية من خلال الأمثلة الآتية :

## 1 مسألة ميزانية رأس المال:

تخطط شركة لصرف رأس مالها خلال الفترات الزمنية $m$ القادمة .
ويوجد $n$ مشروع يتنافس على رأس مال محدود هو $B_i$ المتوافر للاستثمار في الفترة $i$ .
وعند اختيار كل مشروع يصبح هذا المشروع بحاجة إلى رأس مال معين في كل فترة من الفترات يُرمز له بالرمز $a_{ij}$ للاستثمار المطلوب في المشروع $j$ خلال الفترة $i$
(أي $a_{ij}$ هو المال اللازم في المشروع $j$ خلال الفترة $i$) .
وتقاس قيمة المشروع بدلالة تدفق السيولة الموافق لهذا المشروع في كل فترة محسوماً منه قيمة التضخم (الزيادة التي تطرأ من جراء تشغيل المال)
ويُدعى ذلك صافي القيمة الحالية .
لنفرض أن $v_j$ هو صافي القيمة الحالية للمشروع $j$ .
تكمن المسألة في اختيار المشاريع الملائمة للاستثمار والتي تجعل القيمة الكلية لجميع المشاريع المختارة أعظمية .

الحل: ليكن لدينا المتحول $x_j$ (حيث $j=\overline{1,n}$) الذي يأخذ القيم التالية :

$$\begin{cases} x_j = 1 & \text{إذا اخترنا المشروع } j \\ x_j = 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

- دالة الهدف: القيمة الكلية لجميع المشاريع المختارة أعظمية.

إن قيمة المشروع j هي $v_j x_j$ حيث أن القيمة تقاس بصافي القيمة الحالية (حسب نص المسألة).

فإذا اخترنا المشروع j فستكون قيمة هي $v_j \times 1 = v_j$

أما إذا لم نختر المشروع j فستكون قيمة هي $v_j \times 0 = 0$

وهكذا تكون القيمة الكلية للمشاريع هي:

$$Z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n$$

- القيود: لدينا في الفترة i رأس مال محدود $B_i$ يجب ألا نتجاوزه.

إن المال المستخدم للمشروع j في الفترة i هو $a_{ij} x_j$.

حيث إذا اخترنا المشروع j ستكون قيمة هذا المال هي: $a_{ij} \times 1 = a_{ij}$

بينما إذا لم نختر المشروع j ستكون قيمة هذا المال هي: $a_{ij} \times 0 = 0$

وإذا أخذنا مجموع كل الأموال المصروفة على كل المشاريع في كل فترة i فيجب أن لا نتجاوز رأس المال $B_i$، أي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq B_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

* ومنه فالنموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n \longrightarrow Max$$

ضمن القيود:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq B_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq B_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq B_m$$

$$x_j = 0 \quad \text{أو} \quad x_j = 1 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

## 2 مسألة النفقة الثابتة :

لنأخذ مسألة تخطيط إنتاج n منتج حيث يحتاج المنتج j إلى :

- كلفة تحضير أو إنتاج ثابتة $K_j$ مستقلة عن الكمية المنتجة.
- كلفة متغيرة $C_j$ لكل وحدة إنتاج، تتناسب مع الكمية المنتجة.

ولنفرض أنه لدينا m مادة.

وأن كل وحدة من المنتج j تحتاج $a_{ij}$ وحدة من المادة i.

ونفرض أن المنتج j الذي له فرصة مبيعات قدرها $d_j$ يُباع بسعر $P_j$ للوحدة الواحدة.

وأنه يتوفر لدينا فقط $b_i$ وحدة من المادة i حيث $i = \overline{1,m}$.

يصبح هدف المسألة تعيين خليط المنتجات الأمثل الذي يجعل الربح الصافي أعظمياً.

الحل: إن الكلفة الكلية للإنتاج = الكلفة الثابتة + الكلفة المتغيرة.

وهي تابع غير خطي للكمية المنتجة بسبب وجود نوعين من الكلفة (ثابتة ومتغيرة).

بمساعدة المتحولات الصحيحة الثنائية $\{0, 1\}$ يمكن صياغة المسألة بشكل برنامج خطي ذي أعداد صحيحة.

لنفرض $x_j$ هو الكمية المنتجة من المنتج j.

ولنفرض أن المتحول الثنائي $\delta_j$ يرمز إلى القرار بإنتاج المنتج j أو عدم إنتاجه، أي:

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & ; \text{إذا اتخذ قرار بإنتاج المنتج } j \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك.} \end{cases}$$

بحيث إذا كانت $\delta_j = 1 \Leftarrow x_j > 0$

وإذا كانت $\delta_j = 0 \Leftarrow x_j = 0$

ويجب أن نضع في النموذج الرياضي ما يضمن ذلك من خلال شرط رياضي ما.

- دالة الهدف: إن الربح الصافي هو سعر المبيع مطروحاً منه الكلفة الكلية للإنتاج وذلك لكل منتج من المنتجات.

إن قيمة المنتج j (سعر المبيع) هي : $P_j\, x_j$

ومنه قيمة جميع المنتجات هي : $\sum_{j=1}^{n} P_j\, x_j$

/ /

إن كلفة إنتاج $x_j$ وحدة من المنتج $j$ هي: الكلفة الثابتة + الكلفة المتغيرة.

* الكلفة الثابتة هي $k_j \delta_j$ حيث $\left\{ \begin{array}{l} \delta_j = 1 \Leftarrow \text{الكلفة الثابتة هي } k_j \\ \delta_j = 0 \Leftarrow \text{الكلفة الثابتة معدومة.} \end{array} \right.$

* الكلفة المتغيرة هي $c_j x_j$ ، حيث ضربنا بالكمية المنتجة لأن الكلفة المتغيرة تتعلق بها.

ولكن لماذا لم نضرب بـ $\delta_j$ كما في الكلفة الثابتة؟

في الحقيقة لا داعي لذلك لأنه:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_j = 1 \Leftarrow x_j \neq 0 \Leftarrow \text{الكلفة المتغيرة هي } c_j x_j \\ \delta_j = 0 \Leftarrow x_j = 0 \Leftarrow \text{الكلفة المتغيرة هي } 0 \end{array} \right.$$

وهذا يحقق المطلوب ومنه لا داعي لضرب الكلفة المتغيرة بـ $\delta_j$.

بهذه الطريقة نكون قد حافظنا على خطية النموذج.

ومنه كلفة إنتاج كل المنتجات هي: $\sum_{j=1}^{n} (k_j \delta_j + c_j x_j)$

وبالتالي دالة الهدف هي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j \delta_j + c_j x_j)$$

- القيود:

* قيد المواد المستخدمة: يتوفر لدينا فقط $b_i$ وحدة من المادة $i$.

وبالتالي يجب ألا يزيد مجموع ما نأخذه من المادة $i$ في كل المنتجات عن المقدار $b_i$.

أي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \quad i = \overline{1,m}$$

* قيد الطلب على المنتجات: المنتج $j$ له فرصة مبيعات قدرها $d_j$.

وبالتالي يجب ألا ننتج من المنتج $j$ كمية أكبر من $d_j$ كي لا ننتج كميات ثم لا نبيعها فنخسر.

وسيكون هذا الشرط من الشكل:

$$x_j \leq d_j \delta_j \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

/ /

ولكن لماذا ضربنا الطرف الأيمن في القيد الأخير بـ $\delta_j$ ؟

في الحقيقة هذا الأمر هو الذي سيضمن لنا انعدام $x_j$ عندما تنعدم $\delta_j$ .

بحيث إذا لم نختر المنتج $j$ سيصبح الشرط بالشكل : $x_j \leq 0$

وهذا يعني أن $x_j = 0$ حتماً كون المتحولات غير سالبة .

وهذا ما نريده حقاً .

* الآن أصبح لدينا النموذج الرياضي بالشكل :

أوجد القيمة العظمى للتابع :

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{j=1}^{n} (k_j \delta_j + c_j x_j) \longrightarrow Max$$

ضمن الشروط :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1 \leq d_1 \delta_1$$
$$x_2 \leq d_2 \delta_2$$
$$\vdots$$
$$x_n \leq d_n \delta_n$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

$$\delta_j = 0 \quad \text{أو} \quad \delta_j = 1 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

---

نهاية المحاضرة العاشرة

^_^