مشتقات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات:

★ المشتقات الجزئية للدوال الحقيقية لعدة متغيرات

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية مفتوحة في R

حيث D مجموعة مفتوحة $f: D \subseteq R^n \to R$

فإذا وجدت النهاية التالية

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1+h, c_2, c_3, \dots c_n) - f(c_1, c_2, \dots c_n)}{h}$$

$C = (c_1, c_2, \dots c_n) \in D^\circ$

وإذا وجدت النهاية نقول أن لهذه الدالة مشتق جزئي في النقطة c بالنسبة للمتغير الأول x_1 ونرمز له $\frac{\partial F}{\partial x_n}(c)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2+h, c_3, \dots c_n) - f(c_1, c_2, \dots c_n)}{h}$$

$y = f(x)$

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$\Delta y = f(x + \Delta x) -$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

وهكذا بنفس الطريقة نوجد المشتقات الجزئية من x_3 إلى ... $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ وبنفس الطريقة وبالتالي نحصل على n مشتق جزئي ندعوها بالمشتقات الجزئية الأولى للدالة f

المشتقات الجزئية الأولى: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} : D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$c \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}(c_i)$$

بخصوص الدالة تابع لعدة متغيرات

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} : D^\circ \subseteq R^n \to R$$

$$c \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x_1}(c)$$

(مشتق جزئي ثاني) مشتق الدالة المشتقة جزئي بالنسبة للمتغير الأول

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$$

مشتق جزئي مرة ثانية
(مشتق جزئي مختلط)

توصيف: لتكن لدينا الدالة f :

$$f : R^2 \to R$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

مشتقها من رتبة k

$$\frac{\partial^k F}{\partial x^k}, \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-1} \cdot \partial y}, \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-2} \cdot \partial y^2}, \dots, \frac{\partial^k F}{\partial x \cdot \partial^{k-1} y}, \frac{\partial^k F}{\partial y^k}$$

ونطلق على هذه على المشتقات الجزئية بالنسبة لنفس المتغير صرفة

$$\frac{\partial^k F}{\partial x_1}, \frac{\partial^k F}{\partial x_2}, \dots$$

غيرها المشتقات الجزئية تسمى مشتقات جزئية (مختلطة)

$$\frac{\partial^k F}{\partial^{k-1} x_1 \cdot \partial x_2}, \frac{\partial^k F}{\partial^{k-2} x_1 \, \partial^2 x_2}$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الصرفة والمختلطة

$$f : R^2 \to R$$
Ex $\quad (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3 \cdot y^5$

الحل:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \cdot y^5$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^3 \cdot y^4$$

$$f_{yx} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^2 y^4$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 15x^2 y^4$$

نستنتج أن الدالة
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

مشتقات $\quad f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^5$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y^2}(x,y)=20\,x^3\cdot y^3$$

مثال ٢:

$$f: R^2 \to R$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$

خطة الحل:

أوجد $f(x)$ لما $f(x,y)\neq(0,0)$ وأوجدها عندما $f(x,y)=(0,0)$

الحل:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{x^2y^2+y^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h(0,h)-h(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2y^3x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial x}$$

مبرهنة:

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية $D \subseteq R^2$ مستقرها R

$f : D \subseteq R^2 \to R$

حيث D مجموعة مفتوحة أو النقطة $c \in D^\circ$

ولنفرض تحقق الشرطين التاليين

1- كل من $f(x)$، $f(y)$، $f(x,y)$، $f(y,x)$ موجودة في الساحة D

2- المشتقات الجزئية المختلطة مستمرة في النقطة c التي تنتمي لـ $\mathring{D}$

إذا تحقق الشرطين عندئذ تكون المشتقات المختلطة متساوية

$$f_{xy}(c) = f_{yx}(c)$$