ادرس قابلية الاشتقاق في النقطة $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy$$

تعريف:

$$f(a+\underbrace{h}_{\text{تغير}}, b+\underbrace{k}_{\text{تغير}}) - f(a,b) = f_x(a,b).h + f_y(a,b)k + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

نريد أن نبرهن $\lim_{(h,k)\to(0,b)} \mu(h,k) = 0$

لدينا:

$$f(a+h, b+k) = (a^2+2ah+h^2) + 2(ab+bh+ak+hk)$$

$$f(a,b) = a^2 + 2ab$$

$$f_x(x,y) = 2x+2y \Rightarrow f_x(a,b) = 2a+2b$$

$$f_y(x,y) = 2x \Rightarrow f_y(a,b) = 2a$$

$$2ah + h^2 + 2bh + 2ak + 2hk = 2ah + 2bh + 2ak + \mu\sqrt{h^2+k^2}$$

$$h^2 + 2hk = \mu\sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \mu = \frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu = 0}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < \|\underset{\|h-0,k-0\|}{(h,k)}\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{h^2+2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

بحيث أصغر ما يمكن بدلالة ε

لكن:

$$2hk \le h^2 + k^2$$

$$0 \le (h-k)^2$$

ومنه $0 \le (h-k)^2$ ، بالتالي:

$$\frac{|h^2+2hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} < \sqrt{h^2+k^2} + \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$< 2\sqrt{h^2+k^2} < 2\delta$$

$$\forall \varepsilon>0 , \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0 , \; 0<\|(h,k)-(0,0)\|<\delta$$

$$\Rightarrow |\mu - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \mu(h,k) = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق في أي نقطة (a,b)

مشتقة جزئية:

النقطة (a,b) $\quad dF : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(h,k) \longmapsto d(h,k) = h f_x(a,b) + k f_y(a,b)$$

(a,b) مشتق جزئي بالنسبة لـ x — مشتق جزئي بالنسبة لـ y

لتكن f دالة الخطية ، D مجموعة مفتوحة معرفة بالشكل التالي:

تسمى هذه الدالة بتفاضل جزئية أو تفاضل f بالنقطة (a,b)

مثال: أوجد $d_c F(x,c)$ (أوجد دالة جزئية)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x^3 + 4xy^2 + 2xy \cdot \sin x$$

$$c(0,-2)$$

الحل: نحسب المشتق الجزئي بالنسبة لـ x و y

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2y\sin x + 2xy\cos x$$

$$\boxed{f_x(0,-2) = 16}$$

$$f_y(x,y) = 8xy + 2x\sin x$$

$$\boxed{f_y(0,-2) = 0}$$

$$(x,y)-(0,-2)=(\underbrace{x}_{h},\underbrace{y+2}_{k})$$

$$d_{(0,-2)} F(\overset{h}{x},\overset{k}{y+2}) = 16x + 0(y+2) = 16x$$

تعميم قابلية الاشتقاق من أجل $n \geq 3$

لتكن $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ، $c=(c_1,\dots,c_n)\in \mathring{D}$

عندئذ توجد كرة مفتوحة مركزها c نصف قطرها δ محتواة في D

فإذا كانت $h=(h_1,h_2,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ وتحقق الشرط $\|h\|<\delta$

وإذا وجد ثابت $A=(A_1,A_2,\dots,A_n)\in\mathbb{R}^n$

حيث يكون :

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \mu\|h\|$$

حيث : $\lim\limits_{\substack{\|h\|\to 0\\ h_i\to 0\\ (i=1,\dots,n)}} \mu(h)=0$

1) إذا كانت $h_1\neq 0$ ، $h_2=h_3=\dots=h_n=0$ عندئذ نجد قيمة A_1

$$f(c+h)-f(c)=A_1h_1+\mu\sqrt{h_1^2}$$

نقسم على h_1

$$\frac{f(c+h)-h(c)}{h_1}=A_1\mp\mu$$

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h_1}=A_1+\lim_{h_1\to 0}\mu$$

$$=A_1+0$$

وهو المشتق الجزئي للمركبة الأولى $\frac{\partial F}{\partial x}(c)=A_1+0$

بنفس الطريقة : $A_2=f_{x_2}(c)$ ، $A_3=f_{x_3}(c)$

نكتب:

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} h_i\, f_{x_i}(c)+\mu\|h\|$$

$$\lim_{\|h\|\to 0}\mu=0 \qquad \text{حيث} \quad \|h\|=\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}$$

وندعو الدالة الخطية d_cF المعرفة بالشكل التالي:

$$d_cF : D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

بتفاضل F بالنقطة C

أو مشتقة جزئية

ولتحقيق الانسجام بين الرموز القديمة والرموز الجديدة

نستخدم الدالة التالية

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto dx_i(h)=h_i$$

$$x \longmapsto dx_i(x)=x_i$$

$$d_cF(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(c)\cdot dx_i(h)$$

$$d_cF=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(c)\cdot dx_i$$

مثال: أوجد مشتقة جزئية. أوجد $d_cF(x-c)$

في النقطة c

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

$$f(x,y,z)=e^{-(x+y+z)} \quad . \; c(0,0,0)$$

الحل:

$$f_x(x,y,z)=-e^{-(x+y+z)} \Rightarrow \boxed{f_x(0,0,0)=-1}$$

$$f_y(x,y,z)=-e^{-(x+y+z)} \Rightarrow \boxed{f_y(0,0,0)=-1}$$

$$\boxed{f_z(0,0,0)=-1}$$

$$(x-c)=(x,y,z)$$

$$d_cF(x,y,z)=-x-y-z$$

نضربها بالمشتق حول

نضربها بالمشتق الثاني

نضربها بالمشتق الثالث

مبرهنة مساعدة:

$$f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

ولتكن $c \in D^\circ$ ، f قابلة للاشتقاق في c، فهنالك عددان موجبان δ ، k بحيث إذا تحقق الشرط $\|x-c\|<\delta$

فإن $|f(x)-f(c)| < k\|x-c\|$

الإثبات:

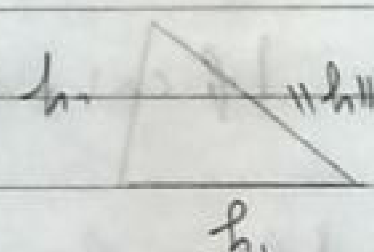
بما أن f قابلة للاشتقاق في c يوجد $\delta_1>0$ بحيث إذا كانت $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$

وتحقق $\|h\|<\delta_1$

فإذا وجد $(A_1,\dots,A_n)\in\mathbb{R}^n$ بحيث

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \mu\|h\|$$

$$\lim_{\|h\|\to 0}\mu(h)=0$$



$h_i \le \|h\|$

$$|f(c+h)-f(c)| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \mu\|h\|\right|$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{n}|A_i|\cdot|h_i| + \mu\|h\|\right]$$

لكن $|h_i|\le\|h\|$ $(i=1,\dots,n)$

$$|f(c+h)-f(c)| \le \sum_{i=1}^{n}|A_i|\cdot\|h\| + |\mu|\cdot\|h\|$$

$$< \left[\sum_{i=1}^{n}|A_i| + |\mu|\right]\cdot\|h\|$$

بما أن $\lim_{\|h\|\to 0}\mu=0$

$$\forall\varepsilon>0,\ \varepsilon=1,\ \exists\delta_2>0,\ 0<\|h\|<\delta_2 \Rightarrow |\mu-0|<1$$

$$|f(c+h)-f(c)| < \left[\sum_{i=1}^{n}|A_i| + 1\right]\|h\|$$

سـ $\sum_{i=1}^{n} |A_i| + 1 = k$

$h = x - c \Leftarrow c + h = k \quad \exists\, \delta = \min(\delta_1, \delta_2)\, ,\ \|h\| < \delta$

$|f(x) - f(c)| < k \cdot \|x - c\|$

#