المحاضرة التاسعة 9/4/2007 يوم الخميس

حل مسألة الشروط الابتدائية لمعادلة تفاضلية جزئية باستخدام تحويلات لابلاس

إذا كانت الدالة $z(x,t)$ تابعة لمتغيرين مستقلين x, t فإننا نسمي المشتقات ~~الجزئية~~ بالنسبة لـ t و المشتقات بالنسبة لـ x بالمشتقات الجزئية

$$\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

وكل معادلة تربط بين الدالة و المتغيرات المستقلة والمشتقات الجزئية تدعى معادلة تفاضلية جزئية

وكل مسألة الشروط الابتدائية لمعادلة تفاضلية جزئية باستخدام تحويلات لابلاس نعتمد على الخواص التالية

1. فاصلة المفاضلة الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ t :

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = S\,Z(x,S) - z(x,0)$$

2. فاصلة المفاضلة الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ t :

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] = S^2 Z(x,S) - S\,z(x,0) - z'(x,0)$$

3. فاصلة المفاضلة الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ x

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = Z'(x,S)$$

4. فاصلة المفاضلة الجزئية من المرتبة الثانية بالنسبة لـ x

$$L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] = Z''(x,S)$$

Example: أوجد الحل العام لمسألة الشروط الابتدائية لحل معادلة التفاضلية الجزئية التالية باستخدام تحويلات لابلاس حيث الشروط الابتدائية هي :

$$z(0,t) = z(3,t) = 0$$

$$z(x,0) = 10\sin 2\pi x - 6\sin 4\pi x$$

المعادلة هي:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$t \geq 0, \quad S > 0$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة بالنسبة للمتحول t

$$L\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] = 4L\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]$$

$$S Z(x,S) - z(x,0) = 4 Z''(x,S)$$

$$4Z''(x,S) - SZ(x,S) = -10\sin 2\pi x + 6\sin 4\pi x$$

$$4Z'' - SZ = -10\sin 2\pi x + 6\sin 4\pi x \quad \text{---} (x)$$

معادلة تفاضلية من مرتبة ثانية ، نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة بدون طرف ثاني

$$4Z'' - SZ = 0$$

$$4\lambda^2 - S = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{S}{4} \Longrightarrow \lambda = \frac{\pm\sqrt{S}}{2}$$

$$Z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \Longrightarrow \boxed{Z_1 = C_1 e^{\frac{\sqrt{S}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-\sqrt{S}}{2}x}}$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة دون طرف ثان

نبحث عن الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثان / ملاحظة نأخذه من شكل المعادلة تماما

$$Z_2 = A\sin 2\pi x + B\sin 4\pi x$$

$$Z_2' = 2\pi A\cos 2\pi x + 4\pi B\cos 4\pi x$$

$$Z_2'' = -4\pi^2 A\sin 2\pi x - 16\pi^2 B\sin 4\pi x$$

نعوض بالمعادلة بـ (x)

$$-16\pi^2 A\sin 2\pi x - 64\pi^2 B\sin 4\pi x - SA\sin 2\pi x - SB\sin 4\pi x = -10\sin 2\pi x + 6\sin 4\pi x$$

$$(-16\pi^2 A - SA)\sin 2\pi x - (64\pi^2 B SB)\sin 4\pi x = -10\sin 2\pi x + 6\sin 4\pi x$$

بالمطابقة نجد

$$-16\pi^2 A - SA = -10 \Longrightarrow \boxed{A = \frac{10}{16\pi^2 + S}}$$

$$64\pi^2 B + SB = 6 \Longrightarrow \boxed{B = \frac{-6}{64\pi^2 + S}}$$

الحل العام:

$$Z = C_1 e^{\frac{\sqrt{S}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{S}}{2}x} + A\sin 2\pi x + B\sin 4\pi x$$

time Appointment Notes

حساب الثوابت C_1, C_2 من الشروط الابتدائية

لكن نحن نتعامل مع Z وليس ζ لانو نحن في تحويل لابلاس الذي يحول

$$\zeta(0,t)=0$$

$$Z(0,s)=\int_0^\infty \zeta(0,t)\,e^{-st}\,\partial t=0$$

$$=\int_0^\infty 0\,dt=0$$

$$\Rightarrow Z(0,s)=C_1e^{0}+C_2e^{0}+A\sin(0)+B\sin(0)$$

$$=C_1+C_2+A(0)+B(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1=-C_2}$$

والشرط الابتدائي الثاني

ثلاثة

$$\zeta(3,t)=\zeta_0$$

$$Z(3,s)=\int_0^\infty \zeta(3,t)\,e^{-st}=0$$

$\boxed{x=3}$

$$Z(3,s)=C_1e^{\frac{3}{2}\sqrt{s}}+C_2e^{-\frac{3}{2}\sqrt{s}}+A(0)+B(0)$$

$$C_1e^{\frac{3}{2}\sqrt{s}}-C_1e^{\frac{3}{2}\sqrt{s}}=0$$

$$C_1\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{s}}-e^{\frac{3}{2}\sqrt{s}}\right)=0$$

20 Sunday

$$C_2=0 \Leftarrow C_1=0 \Leftarrow s>0 \text{ بما أن}$$

فيكون الحل العام :

$$Z=0+0+A\sin 2\pi x+B\sin 4\pi x$$

$$\Rightarrow Z=\frac{10}{16\pi^2+s}\sin 2\pi x-\frac{6}{64\pi^2+s}\sin 4\pi x$$

نأخذ تحويلات لابلاس العكسية بالنسبة لـ t

$$L^{-1}[Z]=L^{-1}\left[\frac{10}{16\pi^2+s}\sin 2\pi x\right]-L^{-1}\left[\frac{6}{64\pi^2+s}\sin 4\pi x\right]$$

$$=10\sin 2\pi x\,L^{-1}\left[\frac{1}{16\pi^2+s}\right]-6\sin 4\pi x\,L^{-1}\left[\frac{1}{s+64\pi^2}\right]$$

$$\zeta(x,t)=10\sin 2\pi x\,e^{-16\pi^2t}-6\sin 4\pi x\,e^{-64\pi^2t}$$

أسهل الحل

وحلها

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حيث

$$u(5,t)=u(0,t)=u(x,0)=0$$

$$u'(x,0)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=3\sin 2\pi x-2\sin 5\pi x$$

الحل [illegible]