المحاضرة التاسعة:

حركة نقطة في حقل:

الثقالة بوجود مقاومة: لتكن لدينا النقطة المادية M كتلتها m وتتحرك بوسط مقاوم $\boxed{R = -mkv}$

حيث k ثابت المطلوب: ايجاد معادلات الحركة للنقطة المادية.

حسب قانون التحريك الأساسي: $m\vec{r}'' = \vec{F}$

وبالتالي إذا أخذنا المحاور الاحداثية واسقطناها

$$m x'' = -m k x'$$

$$y'' = 0$$

$$m z'' = -mg - mk\, z'$$

oz قانون المقاومة

المقاومة متناسبة مع السرعة عكسها على الحس

إذا اختصرنا على m

$$x'' = -k x' \quad (1$$

$$z'' = -g - k z' \quad (2$$

لحل المعادلات:

$$x'' = -k x'$$

$$\frac{dx'}{dt} = -k x'$$ معادلة تفاضلية

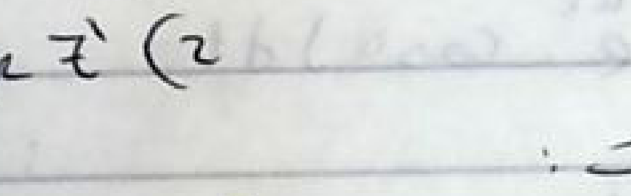
قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dx'}{x'} = -k\, dt$$

نكامل الطرفين:

$$\ln x' = -kt + c_1$$

c_1 ثابت التكامل.



حيث الحركة هنا هي

نعين c_1 من شروط البدء

حسب المحاضرة السابقة

$$t=0 \begin{cases} x=y=z=0 \\ x' = v_0 \cos\alpha \\ y'=0 \\ z' = v_0 \sin\alpha \end{cases} \quad \star$$

$$C_1 = \ln(v_0 \cos\alpha)$$

نعوضها في المعادلة:

$$\ln x' = -kt + \ln(v_0 \cos\alpha)$$

ننقل ln للطرف الآخر

$$\ln \frac{x'}{v_0\cos\alpha} = -kt$$

$$\frac{x'}{v_0\cos\alpha} = e^{-kt} \Longrightarrow x' = v_0 e^{-kt} \cos\alpha$$

نقوم بإيجاد الـ dx

أصبح لدينا

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} . \cos\alpha$$

$$dx = (v_0 . e^{-kt} . \cos\alpha)\, dt$$

نكامل:

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos\alpha + C_2$$

نعين C_2 من شروط البدء من $\star$

$$\boxed{C_2 = \frac{v_0}{k} \cos\alpha}$$

نعوض في المعادلة

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos\alpha + \frac{v_0}{k} \cos\alpha$$

المعادلة الأولى على محور ox

المعادلة الثانية:

$$z'' = g - k z' \quad (2$$

$$\frac{dz'}{dt} = -(g + k z')$$

$$\frac{dz'}{g + kz'} = -dt$$

نكامل:

$$\ln(g + k z') = -kt + C_3$$

نعين C_3 من شروط البدء *

$$C_3 = \ln(g + k v_0 \sin\alpha)$$

نعوض في المعادلة:

$$\ln(g + k z') = -kt + \ln(g + k v_0 \sin\alpha)$$

وبالتالي:

$$\ln \frac{g + k z'}{g + k v_0 \sin\alpha} = -kt$$

ومنه فإن

$$\frac{g + k z'}{g + k v_0 \sin\alpha} = e^{-kt}$$

$$g + kz' = (g + k v_0 \sin\alpha) e^{-kt}$$

وبالتالي:

$$kz' = (g + k v_0 \sin\alpha) e^{-kt} - g$$

نقسم على k

$$z' = \frac{(g + k v_0 \sin\alpha) e^{-kt}}{k} - \frac{g}{k}$$

نقوم بمكاملة المعادلات:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{g + k v_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

$$dz = \frac{(g + k v_0 \sin\alpha}{k} e^{-kt}) \, dt - \frac{g}{k} dt$$

$$z = -\frac{g + k v_0 \sin\alpha}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + c_4$$

نعين c_4 من شروط البدء ★

$$c_4 = \frac{g + k v_0 \sin\alpha}{k^2}$$

$$z = -\frac{g + k v_0 \sin\alpha}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k} t + \frac{g + k v_0 \sin\alpha}{k^2}$$

معادلة الحركة على oz

الحركة المقيدة لنقطة مادية.

مهم
سؤال
نظري
دورة

١) المعادلات التفاضلية لحركة نقطة مادية على منحني في الاحداثيات الديكارتية.

أجابات السؤال
١- (يتغير مع مرور زمن)

لنفرض أن النقطة المادية تتحرك على منحني يتغير مع مرور الزمن

٢- (منحني ينشأ من تقاطع سطحين) او ديكارتية

ولنفرض أن هذا المنحني ينشأ من تقاطع سطحين

$F_1(x, y, z, t) = 0 \quad , F_2(x, y$

$F_2(x, y, z, t) = 0$

$(1) \quad m\ddot{p} = \vec{F} + \vec{N}$ حسب قانون التحريك الأساسي

النقطة المادية تتحرك على منحني فيكون لها رد فعل

أما إذا كانت حرة فليس لها رد فعل

(رد الفعل ناظمي على السطح) مرد الفعل ينقسم إلى نوعين

لان المنحني ينشأ من تقاطع سطحين لذلك يوجد ردين فعلين
وان ردين الفعل يقع على المستوي الناظمي على السطحين

((نلاحظ أن رد الفعل للنقطة المادية N يتجه حسب
الناظم على المنحني وذلك بافتراض أن النقطة المادية
تتحرك على المنحني بدون احتكاك (ارتباط مثالي) ومنه
يمكن اعتبار رد الفعل كردي فعل N_1 و N_2 على
السطحين f_1 و f_2 وبالتالي $N = N_1 + N_2$
ونلاحظ كذلك N_1 و N_2 تقعان في المستوي الناظمي
للمنحني ومنه فإن اتجاه الناظم على السطح $f=0$
يتطابق مع شعاع تدرجه وحسب هذا التطابق يكون لدينا

$$N_1 = \lambda_1 \, \text{grad} \, f_1$$

$$N_2 = \lambda_2 \, \text{grad} \, f_2$$

λ_1 و λ_2 مضاريب يجب تحديدهما
ومنه فإن

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\text{grad} \, f_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\text{grad} \, f_2}$$

ونعلم

$$|\text{grad} \, f_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \Delta f_1$$

$$|\text{grad} \, f_2| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} = \Delta f_2$$

حيث Δf هو الوضع التفاضلي

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}$$

إذا عدنا للمعادلة (1) وأسقطناها على المحاور

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}$$

معادلات تفاضلية لحركة النقطة المادية على منحنى يتغير مع مرور الزمن

نقطة مادية ثقيلة تتحرك على دائرة شاقولية من الداخل ، نصف قطر هذه الدائرة a فإذا علمت أن النقطة المادية كانت في لحظة البدء في أخفض مكان على الدائرة وأعطيت سرعة أفقية مقدارها $v_0 \neq 0$ وأن الحركة تتم بدون احتكاك. والمطلوب

1) تحديد حركة النقطة M ثم أوجد رد الفعل

2) ايجاد شروط انفكاك النقطة عن الدائرة.