المحاضرة 9

نتيجة (من برهنة سابقة): $f(x)=x^n+\sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ صورية واحدية

إذا كان يوجد $r \neq 0$ ينتمي لـ $\mathbb{Q}$ يحقق $f(r)=0$

فإنه يوجد $m\in\mathbb{Z}$ يحقق:

$f(m)=0$ و $a_0\equiv 0 \pmod m$ (يوجد أرتيبة الحداثة)

البرهان (للامتحان)

الإثبات: بما أن $f(x)$ تملك صفر في $\mathbb{Q}$ فإن $(x-r)\setminus f(x)$

أي $f(x)$ قابلة للتحليل في $\mathbb{Q}$ ومنه $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$

نكون حسب المبرهنة السابقة: $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$

ومنه $f(x)=(x-m)(x^{n-1}+\dots+\frac{a_0}{m})\in\mathbb{Z}[x]$

$$\underbrace{(x-m)}_{\mathbb{Z}[x]}\underbrace{(x^{n-1}+\dots+\tfrac{a_0}{m})}_{\mathbb{Z}[x]}$$

ومنه يوجد $m\in\mathbb{Z}$ يحقق $f(m)=0$ و $a_0\equiv 0 \pmod m$

أمثلة: 1 - إذا كانت $f(x)=x^5+6x^3-x^2-6$ معرفة

على $\mathbb{Z}$ هل هي قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$؟ نعم

إذا كانت $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ فهي قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$

وإذا كانت تملك صفراً في $\mathbb{Q}$ فهي صفراً في $\mathbb{Z}$

ويكون قاسم للحد الثابت الذي هو $-6$

إن قواسم الـ 6 هي $\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$

$f(1)=1^5+6(1)^3-(1)^2-6=0$

وبالتالي يكون $(x-1)\setminus f(x)$ ومنه $f(x)$ قابلة للتحليل

على $\mathbb{Q}$ وبالتالي فهي قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$

ج-2)

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

هل الحدودية قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$ أو على $\mathbb{Q}$

- إذا كانت $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ فتكون قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$
- إذا كانت تملك صفر في $\mathbb{Q}$ فتملك صفراً في $\mathbb{Z}$
- فيكون قاسم للحد الثابت

$f(1) = 3 \quad , \quad f(-1) = -3$

قواسمه $\{\pm 1\}$.

نفرض جدلاً أنه يمكن كتابة $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

$$f(x) = x^4 + (c+a)x^3 + (d + b + ac)x^2 + (ad + cb)x + bd$$

يقتضي أن

$$\begin{cases} c+a=0 \\ d+b+a.c = -2 \\ ad + cb = 3 \\ b \times d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = d = \pm 1$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

نأخذ $b = d = 1$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} c+a=0 \\ ac=4 \\ c+a=3 \end{array}\right.$

يجب $0 = 3$ فقط في حالة $char = 3$

لكن هنا $char = 0$

$0 = 3$ وهذا غير ممكن

نأخذ $\boxed{b = d = -1}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} c+a=0 \\ ac=0 \\ a+c=-3 \end{array}\right.$

$0 = -3$ غير ممكن

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي لا يمكن

كتابة $f(x)$ على شكل جداء حدوديتين كل

منهما من الدرجة الثانية

مما سبق $f(x)$ غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Q}$ ومنه $f$ غير قابلة للتحليل على $\mathbb{Z}$

**ملاحظة:**

1- إذا كانت $f(x)$ حدودية تنتمي لـ $\mathbb{C}(x)$ (حقل) فإذا $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{C}$ إذا وفقط إذا كانت درجتها أكبر أو تساوي 2

2) $f(x)$ تملك دائماً أصفاراً في $\mathbb{C}$ ولكن ليست دائماً قابلة للتحليل

**مبرهنة:** لتكن $f(x)$ حدودية واحدية معرفة على حقل الأعداد الحقيقية. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$

إن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كانت $f(x) = x - r$ أو $f(x) = x^2 - 2rx + (r^2 + s^2)$ حيث $r, s \in \mathbb{R}$ و $s \neq 0$

**الإثبات:** $\Rightarrow$ نفرض $f(x)$ غير قابلة للتحليل.

الحالة الأولى: إذا كانت $f(x) = x - r$ حيث $r \in \mathbb{R}$ يتم المطلوب هي حدودية من الدرجة الأولى

الحالة الثانية: إذا لم تتحقق الحالة الأولى أي $\deg(f) \geq 2$ وبالتالي $f(x)$ قابلة للتحليل على $\mathbb{C}$ حسب الملاحظة

أي يوجد $Z = r + is \in \mathbb{C}$ حيث $(x - Z) \mid f(x)$

إذا كانت $s=0$ فتكون قابلة للتحليل على $R$

وبالتالي يكون مرافق $z$ هو $\bar{z} = r - is \in \mathbb{C}$

تحقق: $(x - \bar{z}) \mid f(x)$

ومنه يجب أن يكون الجداء يقسم $f(x)$

$$(x - z)(x - \bar{z}) \mid f(x)$$

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - \bar{z}x - zx + z\bar{z}$$

$$= x^2 - 2rx + (r^2 + s^2)$$

ومنه: $f(x) = (x^2 - 2rx + (r^2 + s^2))\, g(x)$

حيث $g(x) \in R[x]$

وبما أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل فيكون $g(x) \in R$

وبما أن $f(x)$ واحدية فيكون $g(x) = 1$

وبالتالي:

$$f(x) = (x^2 - 2rx + (r^2 + s^2))\,;\quad s \neq 0$$

وهو المطلوب

لاثبات العكس: نلاحظ أنه إذا كانت

$f(x) = x - r$

(فإنها غير قابلة للتحليل على $R$)

الاحتمال الثاني: $f(x) = x^2 - 2rx + (r^2 + s^2)$

$s \neq 0 \quad , \quad r, s \in R$

في هذه الحالة نفرض جدلاً أن $f(x)$ قابلة للتحليل على $R$

إذاً يوجد عنصر $R \ni 0 \neq a$

بحيث $f(a) = 0$ (حسب مبرهنة سابقة)

عوضنا بدل $x$ $a=x$

$$0=a^2-2ra+(s^2+r^2)$$

معادلة من الدرجة الثانية نحسب الـ $\Delta$

نظهر لدينا

$s\neq 0$ و $\exists\, a=r+is$

وهذا تناقض كون $a$ عدد حقيقي وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ ومنه $f(x)$ غير قابلة للتحليل على $R$

معيار من الدرجة الثانية

نتيجة: إذا كانت $f(x)$ حدودية من الدرجة الثانية

(1) $f(x)=ax^2+bx+c\in R[x]$ (معرفة على حقل الأعداد الحقيقية)

فإن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على $R$ إذا وفقط إذا كانت

$$\Delta=b^2-4ac<0$$

الإثبات: $g(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\in R[x]$ (قسمنا (1) على $a$)

نفرض أن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على $R$

وعليه تكون الحدودية $g(x)$ حدودية واحدية وغير قابلة للتحليل على $R$

$$g(x)=x^2-2rx+(r^2+s^2)$$

$s\neq 0$ , $s,r\in R$

بطابقة:

$$\left.\begin{aligned}\frac{b}{a}&=-2r\\ \frac{c}{a}&=r^2+s^2\end{aligned}\right)\Rightarrow \begin{aligned}b^2&=-2ra\\ c&=a(r^2+s^2)\end{aligned}$$

$$b^2-4ac=(-2ra)^2-4a(ar^2+as^2)$$

$$b^2-4ac = 4r^2a^2 - 4a^2r^2 - 4a^2s^2$$
$$= -4a^2s^2 < 0$$

#

لإثبات العكس: نفرض جدلاً أن

$$f(x) = ax^2 + bx + c \in R[X]$$

قابلة للتحليل على $R$

كونها جدودية من الدرجة الثانية يوجد جذر في $R$

وبالتالي $f(x)$: [illegible] $(x-r) \mid f(x)$

حسب مبرهنة سابقة: $r \in R$ ، $f(r) = 0$

إذا عوضنا الـ $r$

$$0 = ar^2 + br + c$$

معادلة من الدرجة الثانية

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \in R$$

ومنه $b^2 - 4ac \geq 0$ ومنه تناقض الفرض

وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ ومنه $f(x)$

غير قابل للتحليل على $R$

---

مبرهنة (الباقي أو التحليل)

لتكن $R$ حلقة تبديلية واحدية و $f(x) \in R[X]$

عندئذ يوجد $P(x) \in R[X]$ ، $a \in R$

، $P(x)$ جدودية وحيدة تحقق:

$$f(x) = (x-a)P(x) + f(a)$$

**الإثبات**: حسب خوارزمية القسمة من أجل $f(x)$ و $g(x)=x-a$ فإن يوجد حدوديتين وحيدتين $r(x), q(x) \in R[x]$

بحيث: $f(x) = q(x).g(x)+r(x)$

$r(x)=0$ أو $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$

$r(x)=0$ أو $\deg(r(x))=0$ (هذه صحيحة لأن لو لم تكن $\deg(r(x))=0$

وعلى هذا فإن:

لا تستطيع ثابت $f(a)$ ...

$$f(a) = (a-a)q(a)+r(a)$$

$$f(a)=r(a) \in R$$

ومنه وبالتالي يوجد حدودية وحيدة $p(x)=q(x) \in R[x]$

تحقق:

ثابت

$$f(x) = (x-a)p(x) + f(a)$$

---

**نتيجة**: إذا كانت $R$ حلقة تبديلية واحدية فإن $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-r)$ إذا وفقط إذا كان $r$ صفرا لـ $f(x)$

**الإثبات**: حسب السابق: عندئذ يوجد حدودية وحيدة تحقق $f(x)=(x-r)p(x)+f(r)$

$r$ صفرا لـ $f(x) \iff f(r)=0$

$\iff f(x)=(x-r)p(x)$

$\iff f(x)$ تقسم $(x-r)$