د. عبداللطيف هنانو — تمثيل الزمر والجبور — 9/3/2015

Eman Alhalboni

المحاضرة الأولى :

مدخل الى تمثيل الزمر والجبور :

يرتكز مفهوم تمثيل الزمر على ايجاد تشاكل زمري بين الزمرة G والزمرة الخطية (زمرة المؤثرات الخطية القلوبة).

وبالتالي لفهم تمثيل الزمر والجبور يتطلب ذلك الماماً في نظرية الزمر وخاصة الزمر المنتهية بالاضافة الى الجبر الخطي (المؤثرات الخطية على فضاء شعاعي V).

اهم الزمر التي سنتعامل معها :

الزمرة الدوارة : اذا كان a عنصر من زمرة G (ضربية) فان المجموعة $\{a^z : z \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$ زمرة جزئية من الزمرة G تسمى الزمرة الدوارة المولدة بالعنصر a.

اذا كانت مرتبة العنصر الذي يولد الزمرة منتهية اي $o(a) = n$ فان الزمرة الدوارة تكون منتهية ونرمز $\langle a \rangle_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \; ; a^n = e$ زمرة منتهية

حيث n هو اصغر عدد صحيح يحقق $a^n = e$ وهي زمرة تبديلية.

مجموعة منتهية

الزمرة $\mathbb{Z}_n$: $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ زمرة جمعية تبديلية.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_n : \quad a + b = \begin{cases} a+b & : a+b < n \\ (a+b) - n & : a+b > n \end{cases}$$

$$e = 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{Z}_n \; ; (-x) = n - x$$

جدول كايلي من اجل $\mathbb{Z}_5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

الزمرة الواحدية $U(n)$

لتكن $n > 1$ عدد صحيح فان المجموعة

$$U(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \; ; (n, m) = 1 \; ; m < n\}$$

زمرة بالنسبة لعملية الضرب

$$\forall a, b \in U(n) \; ; \; a.b = a.b \pmod n$$

مثلاً : لتكن لدينا الزمرة $U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$

زمرة دوارة مولدة بـ 3 من المرتبة الرابعة $\langle 3 \rangle_4$

جدول كيلي للزمرة $U(10)$

$\times$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

كل سطر أو عمود يحوي جميع عناصر الزمرة

زمرة التباديل S_n : منتهية غير تبديلية

لتكن لدينا X مجموعة غير خالية ولنأخذ مجموعة كل التقابلات من الشكل $f: X \longrightarrow X$ ونرمز لها بـ $G(X)$ ونعرف عليها عملية تركيب التطبيقات : $G(X) = \{f : X \longrightarrow X\}$ فنجد بسهولة ان $G(X)$ زمرة غير تبديلية بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات . الحيادي فيها هو التطبيق المطابق I_X ، ولكل عنصر فيها مقلوب f^{-1}

* بحالة خاصة: اذا اخذنا X مجموعة منتهية $X = \{1, 2, \dots, n\}$ نحصل على زمرة التباديل S_n وهي زمرة منتهية مرتبتها $n!$ اي $|S_n| = n!$

اي ان كل عنصر $\sigma \in S_n$ هو تقابل ، من الشكل :

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$
$$i \longmapsto \sigma_i$$

الشكل النموذجي للتبديلة :

عناصر المجموعة مرتبة

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

مثلاً: من أجل $n = 3$ نجد :

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

يمكن توضيح جداء تبديلتين بالشكل: مثلاً

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

نبدل بين الاسطر

ترميز التبديلات السابقة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2) \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)$$

لان $2 \to 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3) \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)$$

$$S_3 = \{ e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3) \}$$

نبرهن على ان هذه الزمرة مولدة بالعنصرين :

$$b = (1\ \ 2) \quad , \quad a = (1\ \ 2\ \ 3)$$

اذا هي ليست زمرة دوارة :

$$S_3 = \{ a^i b^j \ ; \ i = 0,1,2, \ j = 0,1 \}$$

$$= \langle a = (1\ 2\ 3) \ , \ b = (1\ 2) \rangle$$ تحقق من ذلك ؟

$$S_3 = \{ e, a, b, ab, a^2b, a^2 \}$$

$$b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(2\ \ 3)$

$$\boxed{ba = a^2 b}$$

حيث ان ابا ك .

$$a^2 . a = a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$ba^2 = ba.a = a^2 ba = a^2 a^2 b = a^4 b = ab$

$ba^2 b = b.ba = b^2 a = a$

$aba^2 b = abba = a^2$

×	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

Finished Lecture ...