الخميس : 26/3/2014

المحاضرة الرابعة :

حل الوظيفة :

برهن أن لمسألة القيم الابتدائية التالية

$$y' = f(x,y) = x^2+y^2 \quad ; \quad y(0)=0$$

حلا وحيدا استنادا إلى مبرهنة الوجود والوحدانية ثم أوجد التقريب الثاني للمسألة المطروحة.

البرهان :

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

دالة كثيرة حدود في x, y وهي معرفة ومستمرة على المستطيل :

$$|x-x_0| \leq a \qquad |y-y_0| \leq b$$

$$x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow |x| \leq a \qquad |y| \leq b$$

$$|f(x,y)| = |x^2+y^2| \leq |x^2|+|y^2| = a^2+b^2 = M$$

$$|f(x,y)| \leq M = a^2+b^2$$

فالدالة محدودة.

نفرض:

h تعتمد على الحدين a, b

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

$$= \min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right) \quad ; \quad a=b=1$$

$$h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

وشرط ليبشتز محقق

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1-y_2|$$

ولإيجاد هذا الحل نستخدم طريقة بيكارد للتقريبات المتتالية:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\, ds$$

$n=1 \Rightarrow \quad y_1(x) = \int_0^x s^2\, ds = \frac{1}{3}x^3$

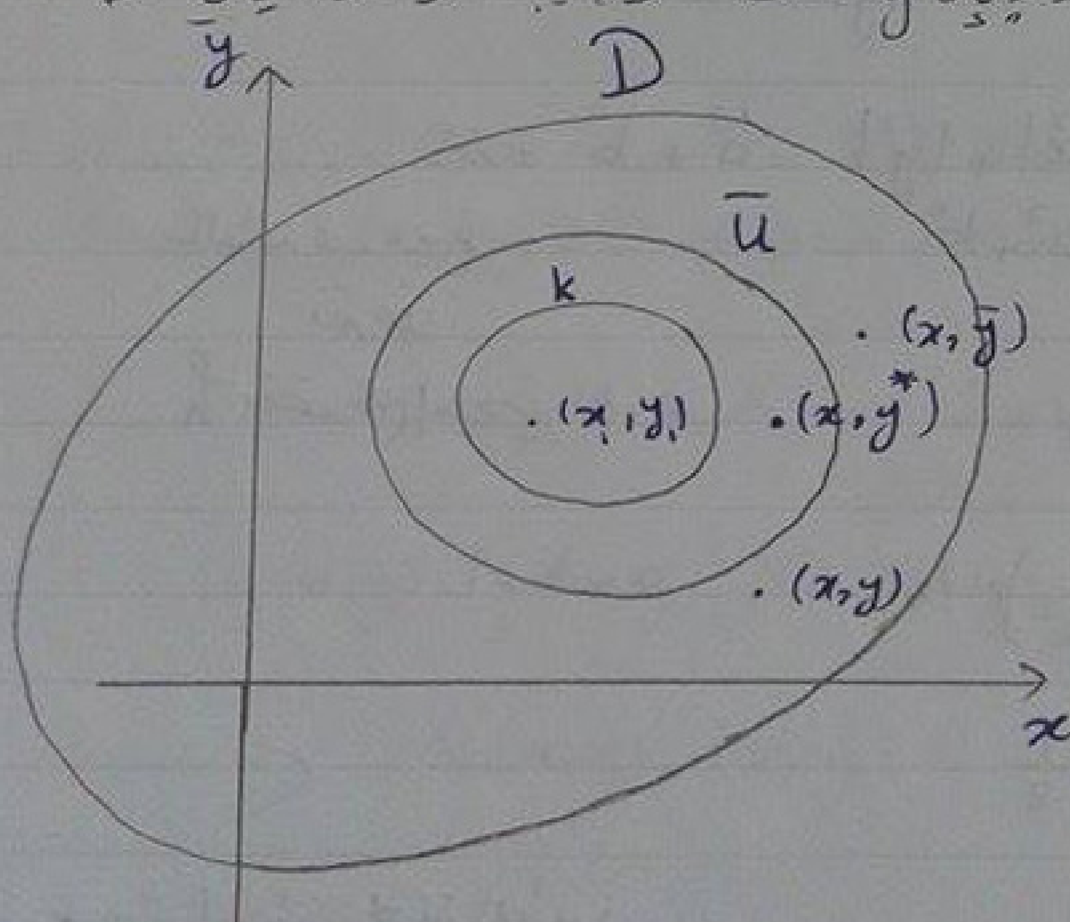
$n=2 \Rightarrow \quad y_2(x) = \int_0^x f(s, y_1)\, ds = \int_0^x \left(s^2 + \frac{s^6}{9}\right) ds$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

مبرهنة:

فضاء التوابع المستمرة

نفرض أن D مفتوحة وكان للدالة $g \in C(D)$ مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة لـ y في المنطقة D عندئذٍ فإن g تحقق شرط ليبشتز الموضعي في D



$y^* \in (y, \bar{y})$

$(x_1, y_1) \in D$

الإثبات:

لتكن $(x_1, y_1) \in D$، بما أن D مفتوحة فنستنتج يوجد جوار دائري نسميه u للنقطة (x_1, y_1) بحيث يكون محتوى في D وبالتالي فإن لصاقة هذا الجوار $\bar{u}$ أيضاً تكون محتوى في D ولأن $\frac{\partial g}{\partial y}$ مستمر فرضاً فالاستمرار محافظ على

التراص و $\bar{u}$ هي مجموعة متراصة وكل متراصة في الفضاء تكون مغلقة ومحدودة هذا يعني أن $\frac{\partial g}{\partial y}$ محدود، وبالاعتماد على تعريف المحدودية يوجد ثابت k

بحيث:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \leqslant k$$

واستناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى:

من أجل $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$ نستنتج:

$$g(x, y) - g(x, \bar{y}) = \frac{\partial g(x^{*}, y^{*})}{\partial y} (y - \bar{y})$$

(x, y^{*}) تقع بين النقطتين (x, y) و $(x, \bar{y})$

$$y^{*} \in (y, \bar{y})$$

بأخذ القيمة المطلقة:

$$|g(x, y) - g(x, \bar{y})| = \left|\frac{\partial g(x, y^{*})}{\partial y} (y - \bar{y})\right|$$

بالاستفادة من أن $\frac{\partial g}{\partial y}$ محدودة

$$|g(x, y) - g(x, \bar{y})| \leqslant k\,|y - \bar{y}|$$

وهذا ما هو إلا شرط ليبشتز الموضعي. وهو المطلوب.

الاستمرار المتساوي:

لتكن M مجموعة من الدوال المستمرة على الفترة $J: a \leq x \leq b$ ،

نقول عن هذه المجموعة أنها متساوية الاستمرار إذا استطعنا أن نجد لكل عدد $\varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \quad ; \quad \forall x, \bar{x} \in J$

$\forall f \in M$

δ هي نفسها لجميع الدوال M

- نذكر هنا هذا التعريف بالاستمرار المنتظم لكنه ليس ذاته والفارق هنا هو أن δ هي نفسها لجميع الدوال M بينما في الاستمرار المنتظم فإنها تتغير بتغير التابع.

مبرهنة:

- إذا كانت المتتالية $(f_n(x))_{n \geq 1} = (f_1(x), f_2(x), \dots)$

متساوية الاستمرار في $J = [a, b]$ وإذا تقاربت هذه المتتالية عند جميع قيم x من مجموعة A جزئية من J وكثيفة أيضاً في J ، فعندئذٍ تتقارب المتتالية $(f_n(x))_{n \geq 1}$ عند جميع قيم x من J بانتظام وتكون نهايتها $f(x)$ دالة مستمرة في J

تذكرة قبل البرهان:

تعريف:

نقول عن مجموعة النقاط A إنها كثيفة في J إذا احتوت كل فترة جزئية من J نقطة واحدة على الأقل من A ،

وعلى سبيل المثال بأن مجموعة الأعداد النطقة المنتمية إلى J تشكل مجموعة كثيفة في J Q

البرهان:

بما أن المتتالية متساوية الاستمرار حسب التعريف السابق:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta = \delta(\varepsilon) ;$$

بحيث تتحقق المتراجحة $|f_n(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

وذلك من أجل جميع الدوال $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$

إن فكرة البرهان تعتمد على:

لنقسم الفترة J إلى p فترة جزئية مغلقة $J_1, J_2, J_3, \dots, J_p$ وبحيث يكون طول كل فترة أصغر من δ، وفي كل من هذه الفترات يوجد عدد x_i ينتمي إلى $J_i \cap A$

وبما أن المتتالية المذكورة أعلاه متقاربة فرضاً عند جميع قيم x_i فعندئذٍ يمكن إيجاد عدد مثل $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$|f_m(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \qquad ; \qquad m, n \geq n_0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, p$$

فإذا كانت x نقطة كيفية من J، ولنفرض أن تنتمي إلى الفترة الجزئية المغلقة J_q مثلاً فعندئذٍ يكون:

$$|x - x_q| < \delta$$

واستناداً لتعريف الاستمرار المتساوي يكون:

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x) - f_m(x_q) + f_m(x_q) + f_n(x_q) - f_n(x_q) - f_n(x)$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_q)| + |f_m(x_q) - f_n(x_q)| + |f_n(x_q) - f_n(x)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \qquad ; \quad \forall m, n \geq n_0$$

وهذا يعني بدوره أن المتتالية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من أجل جميع قيم x المنتمية إلى الفترة J المغلقة

وهو المطلوب.

مبرهنة أسكولي - أرزيلا :

إن كل متتالية من الدوال المتساوية الاستمرار $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$

على الفترة المغلقة $J=[a,b]$ ، المحققة للشرط :

$|f_n(x)| \le c$; $n \ge 1$ (محدودة) $\forall x \in J$

عندئذٍ تحتوي على متتالية جزئية متقاربة بانتظام في J

البرهان :

لتكن $A=\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ مجموعة محدودة وكثيفة في J عندئذٍ فإن المتتالية العددية :

$$a_n = f_n(x_1) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

تكون محدودة ومن ثم فإننا نجد فيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{p_1}(x_1),\ f_{p_2}(x_1),\ f_{p_3}(x_1),\ f_{p_4}(x_1),\ \dots$$

كذلك يمكن إيجاد متتالية عددية من الدوال المتساوية الاستمرار في J مثل :

$b_n = f_n(x_2)$ جزئية من $a_n = f_n(x_1)$

تكون محدودة وأيضاً نجد فيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{q_1}(x_2),\ f_{q_2}(x_2),\ f_{q_3}(x_2),\ f_{q_4}(x_2),\ \dots$$

كذلك يمكن إيجاد متتالية عددية من الدوال المستمرة في J مثل :

$c_n = f_n(x_3)$ جزئية من $b_n = f_n(x_2)$

تكون محدودة وبالتالي نجد فيها متتالية جزئية متقاربة مثل :

$$f_{r_1}(x_3),\ f_{r_2}(x_3),\ f_{r_3}(x_3),\ f_{r_4}(x_3),\ \dots$$

وبمتابعة هذا الأسلوب نحصل على متتالية من المتتاليات كما يلي :

$f_{p_1}, f_{p_2}, f_{p_3}, f_{p_4}, \dots$ متقاربة في $x = x_1$

$f_{q_1}, f_{q_2}, f_{q_3}, f_{q_4}, \dots$ متقاربة في $x = x_1, x_2$

$f_{r_1}, f_{r_2}, f_{r_3}, f_{r_4}, \dots$ متقاربة في $x = x_1, x_2, x_3$

$\dots\dots$

وفي السطر k نجد متتالية جزئية من متتالية السطر $k-1$ وتكون متقاربة في $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$

وهذا يعني بدوره استنتاج أن المتتالية القطرية $f_{p_1}, f_{q_2}, f_{r_3}, \dots$ متقاربة مهما كانت x من A وذلك لأنه إذا كانت x_k من A فإن هذه المتتالية بدءاً من الحد k تحتوي على متتالية جزئية من السطر رقم k

وهكذا نجد أن جميع شروط المبرهنة السابقة تكون محققة أي أن المتتالية القطرية تتقارب بانتظام من أجل جميع قيم x من J

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة...