المعادلات التفاضلية العادية

The Rayleigh-Ritz method

إن معظم النماذج الرياضية المستخدمة في العلوم الطبيعية والهندسة تعتمد على المعادلات التفاضلية (العادية والجزئية) والمعادلات التكاملية ولكن صعوبة إيجاد الحلول الدقيقة لمثل هذه المعادلات تجعلنا بحاجة لطرق تقريبية

سندرس مسألة القيم الحدية _ عند نقطتين _ التالية:

$$(1)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x) \quad 0\le x\le 1$$
$$y(0)=y(1)=0$$

وحيث:

$$\forall x\in[0,1] \quad q(x)\ge 0 \quad p(x)>0$$
$$f,q\in C[0,1] \quad p\in C^1[0,1]$$

في الواقع نحن لا نبحث عن حل للمسألة المعطاة وإنما للصيغة الضعيفة لهذه المسألة.

الصيغة الضعيفة:

لو وضعنا $L(y)=-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y$

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية بتابع v(x) ثم المكاملة على المجال [0,1] نحصل على:

$$(2) \quad I(y)=\int_0^1 v(x)\big(L(y)-f(x)\big)dx=0$$

وحيث $v\in L^1[0,1]$ ويحقق الشروط الحدية للمسألة أي:

$$v(0)=v(1)=0$$

نسمي (2) بالصيغة الضعيفة (weak form) للمعادلة (1).

وندعو v(x) تابع الوزن (weight function).

ويبرهن أن كل حل للصيغة الضعيفة هو حل للمسألة الحدية المرفقة.

ملاحظة:

سميت الصيغة الضعيفة هكذا لأنها تخفض مرتبة الاشتقاق الذي نتعامل معه:

$$\int_0^1 v(x)\left(L(y)-f(x)\right)dx=0$$

$$\int_0^1 v(x)\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y\right)dx-\int_0^1 v(x)(f(x))dx=0$$

$$-\int_0^1 v(x)\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right)dx+\int_0^1 v(x)q(x)y\,dx-\int_0^1 v(x)(f(x))dx=0$$

ومن علاقة المكاملة بالتجزئة:

$$\int_0^1 f\cdot\frac{dg}{dx}dx=[f\cdot g]_0^1-\int_0^1 g\cdot\frac{df}{dx}dx$$

$$-\int_0^1 v(x)\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right)dx=-\left[v(x)\cdot\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right]_0^1+\int_0^1\left(\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\right)dx$$

وكون $v(x)$ يحقق الشروط الحدية نجد:

$$-\int_0^1 v(x)\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right)dx=\int_0^1\left(\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\right)dx$$

ومنه تصبح الصيغة الضعيفة للمسألة:

$$\int_0^1(p.y'v')dx+\int_0^1(v\,q.y)dx-\int_0^1(v\,f)dx=0$$

والتي تحوي المشتقة من المرتبة الأولى فقط للتابع y.

ولإيجاد حل تقريبي للصيغة الضعيفة نعرض المبرهنة التالية:

مبرهنة:

التكامل $\int_0^1 f(x,y,y')dx$ الذي يحقق الشروط الحدية $y(0)=y(1)=0$ يبلغ قيمته القصوى على المنحني y إذا كان $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$ على المنحني y والتي تسمى معادلة أولر – لاغرانج.

انطلاقا من هذه المبرهنة نجد أنه يكفي إيجاد حل معادلة أولر – لاغرانج لإيجاد حل المسألة الحدية المطلوب. إلا أن إيجاد الحل عن طريق هذه المعادلة تبقى غير مجدية وذلك لسببين:

١. إن معادلة أولر – لاغرانج غير قابلة للحل دوما (ولا يمكن التعبير عن الحل بشكل صريح).

مثال:

$$I(y)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(y')^2+e^{y}\right)dx$$

$$y(0)=y(1)=0$$

لإيجاد y الذي يجعل I أصغريا باستخدام أولر – لاغرانج ينبغي علينا إذا حل المعادلة التالية:

$$y''=e^{y}\quad x\in]0,1[\quad y(0)=0\quad y(1)=1$$

ولسوء الحظ هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا يمكننا حلها بدقة.

٢. إن استخدام أولر – لاغرانج لحل حتى بعض المسائل البسيطة غالبا ما يكون صعبا ومعقدا وذلك لأن طبيعة أولر – لاغرانج تتطلب حل معادلة تفاضلية جزئية.

٣. إن طبيعة بعض المسائل قد تتطلب وضع شرط إضافي على الحل y مثل:

$$\int_0^1 G(x,y,y')dx=const$$

وهذا يعني أن أولر – لاغرانج يصبح شرطا مزدوجا

$$\frac{\partial}{\partial y}(f+G)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}(f+\lambda G)\right)=0$$

في كثير من المسائل الفيزيائية نحن غالبا لا نحتاج إلى الحل الدقيق وفي هذه الحالات لا توجد فائدة كبيرة من حل معادلات أولر – لاغرانج لإيجاد الحل الدقيق (هذا إن كان ذلك ممكنا) طالما بإمكاننا الحصول على تقريب جيد بسهولة.

وبوجود كل هذه الصعوبات وطالما أننا غير مهتمين بالبحث عن الحل الدقيق إذا يجب إيجاد طريقة منافسة لإيجاد حل تقريبي.

ولحسن الحظ هناك واحدة فعلا:

طريقة رايلي – ريتز The Rayleigh – Ritz method:

والتي طورها (وبشكل مستقل) كل من Lord Rayliegh, Walter Ritz وهي تقنية تقريبية لحل مسائل القيم الحدية وسنعرضها في بعد واحد وهي تعتمد على المبرهنة التي نعرضها بعد التعريف التالي:

تعريف:

نقول $y\in C^1[0,1]$ إذا كان هو ومشتقه من المرتبة الأولى مستمران ونقول $y\in C^2[0,1]$ إذا كان هو ومشتقاته حتى المرتبة الثانية مستمران ونقول $y\in C_0^2[0,1]$ إذا كان

$y \in C^2[0,1]$ وكان $y(0)=y(l)=0$ ·

مبرهنة:

ليكن $p \in C^1[0,1]$ و $q(x)\geq 0, p(x)\geq \delta > 0$ من أجل $0 \leq x \leq 1$ إن التابع $y \in C_0^2[0,1]$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x) \quad 0\leq x\leq 1$$

إذا وفقط إذا كان التابع الوحيد من $C_0^2[0,1]$ الذي يجعل التكامل التالي أصغرياً:

$$I(u)=\int_0^1\left\{p(x)[u'(x)]^2+q(x)[u(x)]^2-2f(x)u(x)\right\}dx$$

تعتمد طريقة رايلي ريتز على تقريب الحل y بأخذ min I[u] ليس من أجل كل $u \in C_0^2[0,1]$ بل من أجل مجموعة صغيرة من التراكيب الخطية لدوال قاعدة محددة $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$

ففي طريقة رايلي ريتز نبحث عادة عن حل من الشكل $y^*=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ حيث c_i وسطاء يجب تعيينها و φ_i هي مجموعة دوال القاعدة وتسمى توابع الاختبار ويشترط على توابع الاختبار أن تحقق الشروط:

- مستمرة على الساحة المدروسة.
- تحقق الشروط الحدية للمسألة.
- بشكل عام نختار توابع الاختبار بحيث تحقق فيزياء المسألة.

فإذا عوضنا هذا الحل التقريبي في المعادلة التفاضلية وكونه لا يحقق المعادلة سنجد:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy^*}{dx}\right)+q(x)y^*-f(x)=R(x)\neq 0$$

نسمي R(x) الباقي (residual) ونلاحظ أنه تابع للوسطاء c_i وفي طريقتنا نحصل على هذه الوسطاء من المعادلة:

$$I(y^*)=\int_0^1 v(x)R(x)dx=0$$

التي تمثل الصيغة الضعيفة للمسألة. ونريد تعيين الثوابت c_i بحيث يكون R(x) أصغر ما يمكن ويتحقق ذلك عندما يكون $1\leq i\leq n \quad \frac{\partial I}{\partial c_i}=0$ ·

وهي جملة n معادلة جبرية بحلها نستطيع تعيين الثوابت c_i.

الأن بتعويض y^* في الصيغة الضعيفة وحسب المبرهنة السابقة نجد:

$$I(y^*)=I\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\right]=\int_0^1\left\{p(x)\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i'\right]^2+q(x)\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\right]^2-2f(x)\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\right\}dx \quad ...(3)$$

ولإيجاد $\min I\left[y^{*}\right]$ من الضروري نعتبر أن I دالة ب $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ويجب أن يتحقق:

$$(4)\quad \frac{\partial I}{\partial c_j}=0 \quad ;j=1,2,\ldots,n$$

بمفاضلة المعادلة (3) نجد:

$$\frac{\partial I}{\partial c_j}=\int_0^1\left\{2p(x)\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+2q(x)\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)\varphi_j(x)-2f(x)\varphi_j(x)\right\}dx$$

من (4) نجد:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^1\left\{p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right\}dx\right]c_i-\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

$$;j=1,2,\ldots,n \quad (5)$$

المعادلات (5) تكتب كجملة خطية بالشكل المصفوفي Ac=b متغيراتها $c_1,c_2,\ldots,c_n$ حيث A مصفوفة متناظرة تعطى عناصرها بالشكل:

$$a_{ij}=\int_0^1\left[p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right]dx$$

و b معرفة بالشكل:

$$b_i=\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

حيث $i,j=1,2,\ldots,n$

مثال:

أوجد حل مسألة الشروط الحدية التالية:

$$y''(x)=-x$$
$$y(0)=y(1)=0$$

الحل:

باختيار توابع الاختبار: $1\le i\le n \quad \varphi_i(x)=x^i(1-x)$.

من الواضح أنها توابع مستمرة وتحقق الشروط الحدية للمسألة ومستقلة خطيا.

ويأخذ n=2 ولنوجد الحل $y=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$ ومن أجل ذلك نريد تعيين الثوابت c_1,c_2

لدينا $p(x)=-1,q(x)=0,f(x)=-x$:

$$a_{11}=\int_0^1[p(x)\varphi_1'(x)\varphi_1'(x)+q(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)]dx$$
$$=\int_0^1\left[-(1-2x)^2+0\right]dx$$
$$=\int_0^1\left[-(1-4x+4x^2)\right]dx$$

$$=\int_0^1 -1dx+\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1 4x^2dx$$

$$=\left[-x\right]_0^1+\left[2x^2\right]_0^1-\left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{1}{3}$$

$$a_{12}=\int_0^1\left[p(x)\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)+q(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[-\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)+0\right]dx$$

$$=\int_0^1 -(1-2x)x(2-3x)dx$$

$$=\int_0^1(-6x^3+7x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{6}{4}x^4-x^2+\frac{7}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{1}{6}$$

وبنفس الطريقة نحسب ما يلي:

$$a_{22}=\int_0^1\left[p(x)\varphi_2'(x)\varphi_2'(x)+q(x)\varphi_2(x)\varphi_2(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[-\varphi_2'(x)\varphi_2'(x)+0\right]dx$$

$$=\int_0^1 -x^2(2-3x)^2dx$$

$$=\int_0^1 -x^2(4-12x+9x^2)dx$$

$$=\int_0^1(-4x^2+12x^3-9x^4)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3}x^3+3x^4-\frac{9}{5}x^5\right]_0^1=-\frac{2}{15}$$

ولنحسب عناصر المصفوفة b:

$$b_1=\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx=\int_0^1 -x^2(1-x)dx$$

$$=\int_0^1 -x^2dx+\int_0^1 x^3dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{12}$$

$$b_2=\int_0^1 f(x)\varphi_2(x)dx=\int_0^1 -x^3(1-x)dx$$

$$=\int_0^1 -x^3dx+\int_0^1 x^4dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=-\frac{1}{20}$$

ومنه تصبح الجملة المصفوفية: Ac=b

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{20}\end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على جملة المعادلتين:

$$4c_1+2c_2=1$$
$$10c_1+8c_2=3$$

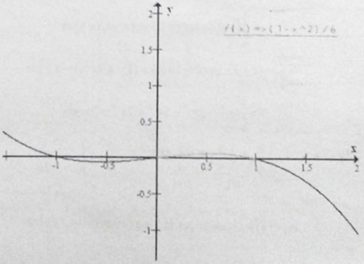
والتي لها الحل: $c_1=c_2=\frac{1}{6}$ ومنه فإن الحل وفق رايلي ريتز للمسألة الحدية المعطاة يكون:

$$y=\frac{1}{6}\varphi_1+\frac{1}{6}\varphi_2$$

$$=\frac{1}{6}x(1-x)+\frac{1}{6}x^2(1-x)$$

$$y=\frac{x(1-x^2)}{6}$$

ونلاحظ أن هذا الحل هو الحل الدقيق للمسألة المعطاة.



مثال:

أوجد حل مسألة الشروط الحدية التالية:

$$y'' + y = x$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

الحل:

باختيار توابع الاختيار: $1 \le i \le n$ $\varphi_i(x) = x^i(1-x)$ ،

من الواضح أنها توابع مستمرة وتحقق الشروط الحدية للمسألة ومستقلة خطيا.

ونأخذ n=2 ولنوجد الحل $y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ ومن أجل ذلك نريد تعيين الثوابت c_1, c_2

لدينا $p(x) = -1, q(x) = 1, f(x) = x$:

$$a_{11} = \int_0^1 [p(x)\varphi_1'(x)\varphi_1'(x) + q(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)]dx$$

$$= \int_0^1 \left[-(1-2x)^2 + 1(x-x^2)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1\right]dx$$

$$= \int_0^1 x^4 dx - 2\int_0^1 x^3 dx - 3\int_0^1 x^2 dx + 4\int_0^1 x dx - \int_0^1 1 dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^1 - [x]_0^1 = -\frac{3}{10}$$

$$a_{12} = \int_0^1 [p(x)\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) + q(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)]dx$$

$$= \int_0^1 [-\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) + \varphi_1(x)\varphi_2(x)]dx$$

$$= \int_0^1 \left[-(1-2x)x(2-3x) + x(1-x)x^2(1-x)\right]dx$$

$$= \int_0^1 (x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 - x^2 + \frac{7}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{3}{20}$$

وبنفس الطريقة نحسب ما يلي:

$$a_{22} = \int_0^1 [p(x)\varphi_2'(x)\varphi_2'(x) + q(x)\varphi_2(x)\varphi_2(x)]dx$$

$$=\int_0^1 \left[-\varphi_2'(x)\varphi_2'(x)+\varphi_2(x)\varphi_2(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1 \left[-x^2(2-3x)^2+x^4(1-x)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 \left[-x^2(4-12x+9x^2)+x^4(1-2x+x^2)\right]dx$$

$$=\int_0^1 (-4x^2+12x^3-8x^4-2x^5+x^6)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3}x^3+3x^4-\frac{8}{5}x^5-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7\right]_0^1=-\frac{13}{105}$$

ولنحسب عناصر المصفوفة b:

$$b_1=\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx=\int_0^1 x^2(1-x)dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^3dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

$$b_2=\int_0^1 f(x)\varphi_2(x)dx=\int_0^1 x^3(1-x)dx$$

$$=\int_0^1 x^3dx-\int_0^1 x^4dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1-\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{20}$$

ومنه تصبح الجملة المصفوفية: Ac=b

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{3}{20} & -\frac{13}{105} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على جملة المعادلتين:

$$-\frac{3}{10}c_1-\frac{3}{20}c_2=\frac{1}{12}$$
$$-\frac{3}{20}c_1-\frac{13}{105}c_2=\frac{1}{20}$$

والتي لها الحل: $c_1=\frac{-71}{369},c_2=\frac{-7}{41}$ ومنه فإن الحل وفق رايلي ريتز للمسألة الحدية المعطاة يكون:

$$y=\frac{-71}{369}\varphi_1+\frac{-7}{41}\varphi_2$$
$$=\frac{-71}{369}x(1-x)-\frac{7}{41}x^2(1-x)$$
$$y=\frac{x(-71+8x+63x^2)}{369}$$

ونلاحظ أن هذا الحل هو الحل الدقيق للمسألة المعطاة.

التفسير الرياضي لهذه الطريقة:

المطلوب إيجاد تابع y يجعل التكامل $I(y)=\int_0^1 w(x)\big(L(y)-f(x)\big)dx$ أصغريا.

من أجل ذلك ليكن Ω فضاء التوابع المستمرة والتي تحقق الشروط الحدية y(0)=y(1)=0

ولنزوده بالنظيم التالي:

$$\|y\|=\int_0^1 y^2(x)dx$$

وبهذا أصبح فضاء منظما وأكثر من ذلك هو فضاء جداء داخلي حيث

$\langle u\backslash v\rangle=\int_0^1 u(x)v(x)dx$ من أجل كل التوابع u,v من Ω ونحن نبحث عن تابع y يجعل I(y) أصغريا أي:

$$I(y)\le I(\hat{y})\quad \forall \hat{y}\in\Omega$$

بمعنى:

$$I(y)=\min_{\hat{y}\in\Omega} I(\hat{y})$$

هذا إن كان ذلك ممكنا.

ولكننا نعلم من المبرهنة الأساسية في التقريب:

في فضاء من E وليكن M فضاء جزئي منه منته البعد عندئذ من أجل أي عنصر x من E يوجد عنصر g من M بحيث $\|x-g\|\to \inf$ وإذا كان الفضاء شديد التنظيم فإن عنصر التقريب الأمثل يكون وحيدا.

تذكرة:

الفضاء شديد التنظيم هو فضاء منظم يحقق:

$$\forall x,y \;:\; \|x+y\|=\|x\|+\|y\| \;\Leftrightarrow\; y=\alpha x$$

وإذا كان النظيم يشتق من جداء داخلي فإن الفضاء شديد التنظيم.

وهذه هي الفكرة الأساسية في رايلي ريتز

بدلا من جعل I(y) أصغريا على كامل الفضاء Ω سنقيد أنفسنا بفضاء جزئي منتهي البعد منه وليكن H_n وهكذا نضمن وجود $y^* \in H_n$ وحيد بحيث يكون

$$I(y^*) = \min_{\hat{y} \in H_n} I(\hat{y})$$

ومنه:

$$I(y^*) \le I(\hat{y}) \quad \forall \hat{y} \in H_n$$

أي يمكننا تقريب $I(y^*)$ بتصغير $I(y)$ على H_n.

وفي طريقة رايلي ريتز نختار متتالية من التوابع $(\varphi_n) \in \Omega$ وليكن H_n هو الفضاء المولد بأول n عنصر من هذه المتتالية (حيث φ_n هي توابع الاختيار).

ويكون لكل عنصر $\psi \in H_n$ الشكل:

$$\psi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + ... + a_n\varphi_n$$

حيث $a_1, a_2, ..., a_n$ هي ثوابت مجهولة.

ويمكننا تعويض ψ في I حتى نعبر عنه كتابع ل $a_1, a_2, ..., a_n$: $I(a_1, a_2, ..., a_n)$ وعندئذ نختار a_i التي تجعله أصغريا.

فالمسألة الآن تعيين الثوابت a_i المجهولة في تمثيل $y^*(x)$ والتي تجعل $I(y^*(x)) = \min I(y)$ ولكن حتى يكون $I(y^*(x)) = I(a_1, a_2, ..., a_n)$ أصغريا يجب أن يتحقق:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \quad 1 \le i \le n$$

وهي جملة n معادلة خطية ب n مجهول $a_1, a_2, ..., a_n$ بحلها نعين الثوابت a_i أي نعين الحل المطلوب وليكن التابع الموافق هو y.

نلاحظ عندئذ التالي:

١. أي تركيب خطي بتوابع الاختبار $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ هو تركيب خطي بتوابع الاختبار $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$ بمعنى إذا كان $\psi \in H_n$ فإن $\psi \in H_{n+1}$ ومنه H_n هو فضاء جزئي من H_{n+1}.

٢. من (١) نجد $I(H_n) \le I(H_{n+1})$ وهذا يعني أنه كلما جعلنا y عاما أكثر فإنه يمكننا الحصول على تقريب أفضل.

تعريف:

نقول عن متتالية توابع الاختبار (φ_n) إنها تامة في Ω إذا تحقق:

من أجل كل $y \in \Omega$ وكل $\varepsilon > 0$ يوجد تركيب خطي $\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$ بحيث يكون:

$$\|\psi - y\| < \varepsilon$$

مبرهنة:

إذا كان التكامل I(y) مستمرا وكانت متتالية توابع الاختبار (φ_n) تامة في Ω عندئذ:

$$\lim_{n \to \infty} I(\psi_n) = \inf_{y \in \Omega} I(y)$$

هذه المبرهنة تعني أنه إذا استطعنا اختيار توابع الاختبار بشكل مناسب فإننا نستطيع الاقتراب من القيمة الصغرى ل I(y) بالقدر الذي نشاء (بالدقة المطلوبة).

ويمكن تلخيص الحل بطريقة رايلي ريتز بالخطوات التالية:

١) اختيار n تابع اختبار φ_i مستقلة خطيا.

٢) نحسب عناصر المصفوفتين A,b من العلاقات:

$$a_{ij} = \int_0^1 \left[p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) \right] dx$$

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

٣) نحسب الثوابت المجهولة $c_1, c_2, \dots, c_n$ من المعادلة المصفوفية Ac=b.

٤) نحسب التركيب الخطي $y^* = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ والذي يجعل التكامل I(y) أصغريا فيكون هو الحل المطلوب.

سؤال: كيف يمكن معرفة كيفية اختيار توابع الاختبار؟

أحيانا كما في أمثلتنا يمكننا القيام بتخمين ناتج عن الخبرة والحدس الرياضي ولكن في الكثير من المسائل التي نريد إيجاد أصغر قيمة ممكنة للتكامل فيها يجب أن نعود إلى المحتوى الفيزيائي للمسألة المدروسة وطرح أسئلة مثل: هل سيكون الحل تابع دوري؟ هل يوجد للحل envelope؟ .... والسؤال عن الخواص البنيوية للحل.

رايلي ريتز الخطية قطعيا piecewise linear Rayliegh – Ritz:

إن أبسط التوابع هو الحدوديات الخطية قطعيا وسنستخدمها كتوابع للقاعدة:

من أجل ذلك نقوم أولا بتجزئة المجال [0,1] إلى n+1 مجال كما يلي:

أولا اختيار النقاط $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ بحيث:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$$

ولتكن $h_i = x_{i+1} - x_i$ من أجل i=0,1,...,n

ثانيا نعرف دوال القاعدة $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ كما يلي:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h_{i-1}}(x-x_{i-1}) & x_{i-1}<x\le x_i \\ \dfrac{1}{h_i}(x_{i+1}-x) & x_i<x\le x_{i+1} \\ 0 & ;x_{i+1}<x\le 1 \end{cases} \quad ...(6)$$

من أجل كل $i=1,2,...,n$.

بما أن φ_i خطية قطعيا فالمشتقات رغم كونها غير مستمرة إلا أنها ثابتة على الفترات (x_j,x_{j+1}) من أجل كل $j=1,2,...,n$ و

$$\varphi_i'(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h_{i-1}} & x_{i-1}<x<x_i \\ -\dfrac{1}{h_i} & x_i<x<x_{i+1} \\ 0 & ;x_{i+1}<x<1 \end{cases} \quad ...(7)$$

من أجل كل $i=1,2,...,n$.

بما أن φ_i',φ_i لا ينعدمان فقط على (x_{i-1},x_{i+1}) عندئذ يكون لدينا:

$$\varphi_i(x).\varphi_j(x)=0 \quad \varphi_i'(x).\varphi_j'(x)=0$$

باستثناء الحالات التي يكون فيها j=i-1,i,i+1 عندئذ الجملة الخطية (5) تصبح جملة شبه قطرية خطية وبالتالي تكون عناصر A غير المعدومة هي:

$$a_{ii}=\int_0^1\left\{p(x)\left[\varphi_i'(x)\right]^2+q(x)\left[\varphi_i(x)\right]^2\right\}dx$$

$$=\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}p(x)dx+\left(-\frac{1}{h_i}\right)^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)dx$$

$$+\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})^2q(x)dx$$

$$+\left(\frac{1}{h_i}\right)^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_{i+1}-x)^2q(x)dx$$

من أجل كل $i=1,2,...,n$.

$$a_{ii+1}=\int\left\{p(x)\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\right\}dx$$

$$=-\left(\frac{1}{h_i}\right)^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)dx+\left(\frac{1}{h_i}\right)^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)(x-x_i)q(x)dx$$

من أجل كل $i=1,2,...,n$.

وعناصر b هي:

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

$$= \frac{1}{h_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})f(x)dx + \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)f(x)dx$$

من أجل كل $i = 1,2,...,n$،

توجد ستة تكاملات مختلفة علينا حسابها:

$$Q_{1i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx \quad ;i = 1,2,...n-1$$

$$Q_{2i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})^2 q(x)dx \quad ;i = 1,2,...n$$

$$Q_{3i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)^2 q(x)dx \quad ;i = 1,2,...n$$

$$Q_{4i} = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx \quad ;i = 1,2,...n+1$$

$$Q_{5i} = \frac{1}{h_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})f(x)dx \quad ;i = 1,2,...n$$

$$Q_{6i} = \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1} - x)f(x)dx \quad ;i = 1,2,...n$$

عندئذ عناصر المصفوفة A والشعاع b يصبح لها الشكل:

$$a_{ii} = Q_{4i} + Q_{4i+1} + Q_{2i} + Q_{3i} \quad ;i = 1,2,...,n$$

$$a_{ii+1} = -Q_{4i+1} + Q_{1i} \quad ;i = 1,2,...,n-1$$

$$a_{ii-1} = -Q_{4i} + Q_{1i-1} \quad ;i = 2,3,...,n$$

$$b_i = Q_{5i} + Q_{6i} \quad ;i = 1,2,...,n$$

نستخدم التكامل العددي لحساب التكاملات السابقة فنجد:

$$Q_{1i} \approx \frac{h_i}{12}\left[q(x_i) + q(x_{i+1})\right]$$

$$(8)\ldots s(x)=\begin{cases} 0 & ; x\le -2 \\ \frac{1}{4}(2+x)^3 & ; -2\le x\le -1 \\ \frac{1}{4}\left[(2+x)^3-4(1+x)^3\right] & -1\le x\le 0 \\ \frac{1}{4}\left[(2-x)^3-4(1-x)^3\right] & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & 1\le x\le 2 \\ 0 & 2\le x \end{cases}$$

$$Q_{3i}\approx\frac{h_i}{12}\left[3q(x_i)+q(x_{i+1})\right]$$

$$Q_{4i}\approx\frac{1}{2h_{i-1}}\left[p(x_i)+p(x_{i-1})\right]$$

$$Q_{5i}\approx\frac{h_{i-1}}{6}\left[2f(x_i)+f(x_{i-1})\right]$$

$$Q_{6i}\approx\frac{h_i}{6}\left[2f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$$

مثال:

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية باستخدام رايلي ريتز الخطية قطعيا:

$$-\frac{d}{dx}(xy')+2y=x^2 \quad ;0\le x\le 1$$

$$y(0)=y(1)=0$$

مستخدما التقسيم التالي: $x_0=0, x_1=0.4, x_2=0.8, x_3=1$

الحل:

الحل المطلوب هو $y(x)=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$ حيث φ_i توابع خطية قطعيا و n=2.

بالمقارنة مع $-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+q(x)y=f(x) \quad ;0\le x\le 1$

نجد أن: $p(x)=x \quad q(x)=2 \quad f(x)=x^2$

ولدينا

$$h_0=0.4, h_1=0.4, h_2=0.2$$

ولنقم بحل المعادلة Ac=b

ولكن أولا نحسب التكاملات اللازمة لذلك:

$$Q_{1i}\approx\frac{h_i}{12}\left[q(x_i)+q(x_{i+1})\right] \quad i=1,2$$

$$Q_{11}=\frac{h_1}{12}\left[q(x_1)+q(x_2)\right]=\frac{0.4}{12}(2+2)=\frac{4}{30}$$

$$Q_{12}=\frac{h_2}{12}[q(x_2)+q(x_3)]=\frac{0.2}{12}(2+2)=\frac{2}{30}$$

$$Q_{2i}\approx\frac{h_{i-1}}{12}[3q(x_i)+q(x_{i-1})]$$

$$Q_{21}=\frac{h_0}{12}[3q(x_1)+q(0)]=\frac{0.4}{12}(3*2+2)=\frac{8}{30}$$

$$Q_{22}=\frac{h_1}{12}[3q(x_2)+q(x_1)]=\frac{0.4}{12}(3*2+2)=\frac{8}{30}$$

$$Q_{3i}\approx\frac{h_i}{12}[3q(x_i)+q(x_{i+1})]$$

$$Q_{31}=\frac{h_1}{12}[3q(x_1)+q(x_2)]=\frac{0.4}{12}(3*2+2)=\frac{8}{30}$$

$$Q_{32}=\frac{h_2}{12}[3q(x_2)+q(x_3)]=\frac{0.2}{12}(3*2+2)=\frac{4}{30}$$

$$Q_{4i}\approx\frac{1}{2h_{i-1}}[p(x_i)+p(x_{i-1})]$$

$$Q_{41}=\frac{1}{2h_0}[p(x_1)+p(x_0)]=\frac{1}{2*0.4}(0.4+0)=\frac{1}{2}$$

$$Q_{42}=\frac{1}{2h_1}[p(x_2)+p(x_1)]=\frac{1}{2*0.4}(0.8+0.4)=\frac{3}{2}$$

$$Q_{43}=\frac{1}{2h_2}[p(x_3)+p(x_2)]=\frac{1}{2*0.2}(1+0.8)=\frac{9}{2}$$

$$Q_{5i}\approx\frac{h_{i-1}}{6}[2f(x_i)+f(x_{i-1})]$$

$$Q_{51}=\frac{h_0}{6}[2f(x_1)+f(x_0)]=\frac{0.4}{6}(2*(0.4)^2+0)=\frac{8}{375}$$

$$Q_{52}=\frac{h_1}{6}[2f(x_2)+f(x_1)]=\frac{0.4}{6}(2*(0.8)^2+(0.4)^2)=\frac{12}{125}$$

$$Q_{6i}\approx\frac{h_i}{6}[2f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$Q_{61}=\frac{h_1}{6}[2f(x_1)+f(x_2)]=\frac{0.4}{6}(2*(0.4)^2+(0.8)^2)=\frac{8}{125}$$

$$Q_{62}=\frac{h_2}{6}[2f(x_2)+f(x_3)]=\frac{0.2}{6}(2*(0.8)^2+1)=\frac{57}{750}$$

الآن نحسب عناصر المصفوفتين A,b

$$a_{ii}=Q_{4i}+Q_{4i+1}+Q_{2i}+Q_{3i}\qquad i=1,2$$

$$a_{ii+1}=-Q_{4i+1}+Q_{1i}\qquad i=1$$

$$a_{ii-1}=-Q_{4i}+Q_{1i-1}\qquad i=2$$

$$b_i=Q_{5i}+Q_{6i}\qquad i=1,2$$

$$a_{11}=Q_{41}+Q_{42}+Q_{21}+Q_{31}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{8}{30}+\frac{8}{30}=\frac{76}{30}$$

$$a_{22}=Q_{42}+Q_{43}+Q_{22}+Q_{32}=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}+\frac{8}{30}+\frac{4}{30}=\frac{192}{30}$$

$$a_{12}=-Q_{42}+Q_{11}=-\frac{3}{2}+\frac{2}{15}=-\frac{41}{30}$$

$$a_{21}=-Q_{42}+Q_{11}=-\frac{3}{2}+\frac{2}{15}=-\frac{41}{30}$$

$$b_1=Q_{51}+Q_{61}=\frac{8}{375}+\frac{8}{125}=\frac{64}{750}$$

$$b_2=Q_{52}+Q_{62}=\frac{12}{125}+\frac{57}{750}=\frac{129}{750}$$

ومنه المعادلة المصفوفية للمسألة المعطاة:

$$\begin{pmatrix} \frac{76}{30} & -\frac{41}{30} \\ -\frac{41}{30} & \frac{192}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{64}{750} \\ \frac{129}{750} \end{pmatrix}$$

ولهذه الجملة الحل:

$$c_1=\frac{764504}{6132725}\approx 0.124659756$$

$$c_2=\frac{54432}{322775}\approx 0.168637596$$

ومنه حل المسألة المعطاة:

$$y=0.124659756\varphi_1+0.168637596\varphi_2$$

حيث:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} \frac{1}{h_0}(x-x_0) & ;x_0\le x\le x_1 \\ \frac{1}{h_1}(x_2-x) & ;x_1<x\le x_2 \\ 0 & ;x_2<x\le 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{5}{2}x & ;0\le x\le 0.4 \\ \frac{5}{2}(0.8-x) & ;0.4<x\le 0.8 \\ 0 & ;0.8<x\le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases} 0 & ;0\le x\le x_1 \\ \frac{1}{h_1}(x-x_1) & ;x_1<x\le x_2 \\ \frac{1}{h_2}(x_3-x) & ;x_2<x\le x_3 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & ;0\le x\le 0.4 \\ \frac{5}{2}(x-0.4) & ;0.4<x\le 0.8 \\ 5(1-x) & ;0.8<x\le 1 \end{cases}$$

مثال:

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية باستخدام رايلي ريتز الخطية قطعيا:

$$-\frac{d}{dx}(x^2y')+xy=x \quad ;0\le x\le 1$$

$$y(0)=y(1)=0$$

مستخدما التقسيم التالي: $x_0=0,x_1=0.2.x_2=0.6,x_3=1$

الحل:

الحل المطلوب هو $y(x)=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$ حيث φ_i توابع خطية قطعيا و n=2.

بالمقارنة مع $-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+q(x)y=f(x) \quad ;0\le x\le 1$

نجد أن: $p(x)=x^2 \quad q(x)=x \quad f(x)=x$

ولدينا

$$h_0=0.2,h_1=0.4,h_2=0.4$$

ولنقم بحل المعادلة Ac=b

ولكن أولا نحسب التكاملات اللازمة لذلك:

$$Q_{1i}\approx\frac{h_i}{12}[q(x_i)+q(x_{i+1})] \quad i=1,2$$

$$Q_{11}=\frac{h_1}{12}[q(x_1)+q(x_2)]=\frac{0.4}{12}(0.2+0.6)=\frac{2}{75}$$

$$Q_{12}=\frac{h_2}{12}[q(x_2)+q(x_3)]=\frac{0.4}{12}(0.6+1)=\frac{4}{75}$$

$$Q_{2i}\approx\frac{h_{i-1}}{12}[3q(x_i)+q(x_{i-1})]$$

$$Q_{21}=\frac{h_0}{12}\left[3q(x_1)+q(0)\right]=\frac{0.2}{12}(3*0.2+0)=\frac{1}{100}$$

$$Q_{22}=\frac{h_1}{12}\left[3q(x_2)+q(x_1)\right]=\frac{0.4}{12}(3*0.6+0.2)=\frac{1}{15}$$

$$Q_{3i}\approx\frac{h_i}{12}\left[3q(x_i)+q(x_{i+1})\right]$$

$$Q_{31}=\frac{h_1}{12}\left[3q(x_1)+q(x_2)\right]=\frac{0.4}{12}(3*0.2+0.6)=\frac{1}{25}$$

$$Q_{32}=\frac{h_2}{12}\left[3q(x_2)+q(x_3)\right]=\frac{0.4}{12}(3*0.6+1)=\frac{7}{75}$$

$$Q_{4i}\approx\frac{1}{2h_{i-1}}\left[p(x_i)+p(x_{i-1})\right]$$

$$Q_{41}=\frac{1}{2h_0}\left[p(x_1)+p(x_0)\right]=\frac{1}{2*0.2}(0.04+0)=\frac{1}{10}$$

$$Q_{42}=\frac{1}{2h_1}\left[p(x_2)+p(x_1)\right]=\frac{1}{2*0.4}(0.36+0.04)=\frac{1}{2}$$

$$Q_{43}=\frac{1}{2h_2}\left[p(x_3)+p(x_2)\right]=\frac{1}{2*0.4}(1+0.36)=\frac{17}{10}$$

$$Q_{5i}\approx\frac{h_{i-1}}{6}\left[2f(x_i)+f(x_{i-1})\right]$$

$$Q_{51}=\frac{h_0}{6}\left[2f(x_1)+f(x_0)\right]=\frac{0.2}{6}(2(0.2)+0)=\frac{1}{75}$$

$$Q_{52}=\frac{h_1}{6}\left[2f(x_2)+f(x_1)\right]=\frac{0.4}{6}(2(0.6)+0.2)=\frac{7}{75}$$

$$Q_{6i}\approx\frac{h_i}{6}\left[2f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$$

$$Q_{61}=\frac{h_1}{6}\left[2f(x_1)+f(x_2)\right]=\frac{0.4}{6}(2(0.2)+0.6)=\frac{1}{15}$$

$$Q_{62}=\frac{h_2}{6}\left[2f(x_2)+f(x_3)\right]=\frac{0.2}{6}(2(0.6)+1)=\frac{11}{150}$$

الآن نحسب عناصر المصفوفتين A,b

$$a_{ii}=Q_{4i}+Q_{4i+1}+Q_{2i}+Q_{3i}\quad i=1,2$$

$$a_{ii+1}=-Q_{4i+1}+Q_{1i}\quad i=1$$

$$a_{ii-1}=-Q_{4i}+Q_{1i-1}\quad i=2$$

$$b_i=Q_{5i}+Q_{6i}\quad i=1,2$$

$$a_{11}=Q_{41}+Q_{42}+Q_{21}+Q_{31}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+\frac{1}{100}+\frac{1}{25}=\frac{65}{100}=\frac{13}{20}$$

$$a_{22}=Q_{42}+Q_{43}+Q_{22}+Q_{32}=\frac{1}{2}+\frac{17}{10}+\frac{1}{15}+\frac{7}{75}=\frac{354}{150}=\frac{177}{75}$$

$$a_{12}=-Q_{42}+Q_{11}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{75}=-\frac{71}{150}$$

$$a_{12} = -Q_{42} + Q_{11} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{75} = -\frac{71}{150}$$
$$b_1 = Q_{51} + Q_{61} = \frac{1}{75} + \frac{1}{15} = \frac{6}{75} = \frac{2}{25}$$
$$b_2 = Q_{52} + Q_{62} = \frac{7}{75} + \frac{11}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$$

ومنه المعادلة المصفوفية للمسألة المعطاة:

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{20} & -\frac{71}{150} \\ -\frac{71}{150} & \frac{177}{75} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{25} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

ولهذه الجملة الحل:

$$c_1 = \frac{6023}{29474} \approx 0.2043496$$
$$c_2 = \frac{6579}{58948} \approx 0.1116068$$

ومنه حل المسألة المعطاة:

$$y = 0.2043496\varphi_1 + 0.1116068\varphi_2$$

حيث:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_0}(x - x_0) & ;x_0 \le x \le x_1 \\ \frac{1}{h_1}(x_2 - x) & ;x_1 < x \le x_2 \\ 0 & ;x_2 < x \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x & ;0 \le x \le 0.2 \\ \frac{5}{2}(0.6 - x) & ;0.2 < x \le 0.6 \\ 0 & ;0.6 < x \le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & ;0 \le x \le x_1 \\ \frac{1}{h_1}(x - x_1) & ;x_1 < x \le x_2 \\ \frac{1}{h_2}(x_3 - x) & ;x_2 < x \le x_3 \end{cases}$$

$$
=\begin{cases} 0 & ;0 \le x \le 0.2 \\ \frac{5}{2}(x-0.2) & ;0.2 < x \le 0.6 \\ \frac{5}{2}(1-x) & ;0.6 < x \le 1 \end{cases}
$$

سؤال؟

بعد اختيار توابع الاختبار وإيجاد الحل التقريبي، كيف نستطيع معرفة دقة هذا التقريب الذي حصلنا عليه بواسطة رايلي ريتز؟

(نحن لا نعلم الحل الدقيق !!!)

في الواقع لا توجد طريقة منهجية لمعرفة دقة التقريب في رايلي ريتز ولكن يمكننا تعويض الحل التقريبي في معادلة أولر – لاغرانج لمعرفة إن كان هو الحل الدقيق أم لا (بانعدام الصيغة أو لا) والانحراف عن الصفر يؤخذ أحيانا كمقياس لدرجة التقريب (إلا أنه ليس معيارا فكل مثال يدرس بشكل مستقل).

إلا أنه يمكننا زيادة دقة التقريب إما بزيادة عدد توابع الاختبار (القاعدة) أو باختيار توابع أفضل (زيادة درجة الحدودية، تحقيق فيزياء المسألة بشكل أفضل، ...)

رايلي ريتز سبلاي التكعيبية The Cubic Spline Rayliegh – Ritz:

عند استخدام توابع خطية قطعيا كتوابع اختبار حصلنا على حل تقريبي للمسألة الحدية مستمر ولكن غير قابل للمفاضلة على المجال [0,1]، لذلك من أجل الحصول على حل من $C_0^2[0,1]$ يجب أن نستخدم توابع أكثر تعقيدا، ولهذا سنستخدم توابع سبلاين تكعيبية.

لتشكيل دوال القاعدة φ_i في $C_0^2[0,1]$ أولا نجزئ المجال [0,1] باختيار عدد صحيح n ولنعرف $h=\frac{1}{n+1}$ هذه العملية تعطينا تقسيما منتظما أي أن النقاط متساوية البعد عن بعضها البعض $x_i=ih \quad ;i=0,1,\dots,n+1$. ولنعرف دوال القاعدة $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n+1}$ كما يلي:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} s\left(\frac{x}{h}\right)-4s\left(\frac{x+h}{h}\right) & ;i=0 \\ s\left(\frac{x-h}{h}\right)-s\left(\frac{x+h}{h}\right) & ;i=1 \\ s\left(\frac{x-ih}{h}\right) & ;2\le i\le n-1 \\ s\left(\frac{x-nh}{h}\right)-s\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right) & ;i=n \\ s\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right)-4s\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right) & ;i=n+1 \end{cases}$$

حيث:

$$(8)\ldots s(x)=\begin{cases} 0 & ;x\le -2 \\ \frac{1}{4}(2+x)^3 & ;-2\le x\le -1 \\ \frac{1}{4}\left[(2+x)^3-4(1+x)^3\right] & -1<x\le 0 \\ \frac{1}{4}\left[(2-x)^3-4(1-x)^3\right] & 0<x\le 1 \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & 1<x\le 2 \\ 0 & 2<x \end{cases}$$

إن $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n+1}$ مجموعة مستقلة خطيا تحقق:

$$\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0 \quad ;i=0,1,\ldots,n,n+1$$

بما أن كل من $\varphi_i'(x),\varphi_i(x)$ لا ينعدم فقط من أجل $x\in\left[x_{i-2},x_{i+2}\right]$ فإن مصفوفة رايلي ريتز شبه قطرية (قريبة من القطرية).

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & . & & . \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & . & . \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & . & . \\ & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ & . & & & & . & & & a_{n-2,n+1} \\ & & . & & & & . & & a_{n-1,n+1} \\ & & & . & & & & . & a_{n,n+1} \\ & . & . & . & 0 & a_{n+1,n-2} & a_{n+1,n-1} & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$a_{ij}=\int_0^1\left\{p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right\}dx$$

$$i, j = 0,1,\dots,n+1$$

والشعاع b عناصره هي:

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

مثال:

أوجد باستخدام رايلي ريتز سبلاين التكعيبية حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$-x^2y'' - 2xy' + 2y = -4x^2$$
$$0 \le x \le 1 \quad y(0) = y(1) = 0$$

علما أن $h = \frac{1}{4}$.

ثم قارن مع الحل الفعلي للمسألة: $y(x) = x^2 - x$.

الحل:

$h = \frac{1}{4} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow n = 3$ وبالتالي يكون لدينا:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.75 \quad x_2 = 0.5 \quad x_3 = 0.25 \quad x_4 = 1$$

نوجد دوال القاعدة $(i = 0,1,2,3,4)$ φ_i:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 12x - 72x^2 + 122x^3 & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 2 - 12x + 24x^2 - 16x^3 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 6x - 32x^3 & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} + 21x - 60x^2 + 48x^3 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{27}{4} - 27x + 36x^2 - 16x^3 & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 16x^3 & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 1 - 12x - 48x^2 + 48x^3 & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ -11 + 60x - 96x^2 + 48x^3 & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ 16 - 48x + 48x^2 - 16x^3 & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}+3x-12x^2+16x^3 & \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{31}{4}-45x+84x^2-48x^3 & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4} \\ -26+90x-96x^2+32x^3 & \frac{3}{4}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_4(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ -2+12x-24x^2+16x^3 & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4} \\ 52-204x+264x^2-112x^3 & \frac{3}{4}\le x\le 1 \end{cases}$$

ثم نحسب المشتقات:

$$\varphi_0'(x)=\begin{cases} 4(3-36x+84x^2 & 0\le x\le \frac{1}{4} \\ -2(6-24x+24x^2) & \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_1'(x)=\begin{cases} -2(-3+48x^2) & 0\le x\le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}(84-480x+576x^2) & \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(-108+288x-192x^2) & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_2'(x)=\begin{cases} 48x^2 & 0\le x\le \frac{1}{4} \\ -12+96x-144x^2 & \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2} \\ 60-192x+144x^2 & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4} \\ -16(3-6x+3x^2) & \frac{3}{4}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_3'(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}(12-96x+192x^2) & \frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(-180+672x-576x^2) & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4} \\ 2(45-96x+48x^2) & \frac{3}{4}\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_4'(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2(6-24x+24x^2) & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4} \\ -4(51-132x+84x^2) & \frac{3}{4}\le x\le 1 \end{cases}$$

ثم نقوم بحساب التكاملات:

$$a_{ij}=\int_0^1\left\{p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)+q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right\}dx$$

$$i,j=0,1,\dots,n+1$$

$$a_{00}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_0'(x)\varphi_0'(x)+2\varphi_0(x)\varphi_0(x)\right\}dx=\frac{11}{56}$$

$$a_{01}=a_{10}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_0'(x)\varphi_1'(x)+2\varphi_0(x)\varphi_1(x)\right\}dx=\frac{193}{896}$$

$$a_{02}=a_{20}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_0'(x)\varphi_2'(x)+2\varphi_0(x)\varphi_2(x)\right\}dx=-\frac{103}{1120}$$

$$a_{03}=a_{30}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_0'(x)\varphi_3'(x)+2\varphi_0(x)\varphi_3(x)\right\}dx=-\frac{47}{4480}$$

$$a_{04}=a_{40}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_0'(x)\varphi_4'(x)+2\varphi_0(x)\varphi_4(x)\right\}dx=0$$

$$a_{11}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_1'(x)\varphi_1'(x)+2\varphi_1(x)\varphi_1(x)\right\}dx=\frac{89}{80}$$

$$a_{21}=a_{12}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_1'(x)\varphi_2'(x)+2\varphi_1(x)\varphi_2(x)\right\}dx=\frac{49}{320}$$

$$a_{31}=a_{13}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_1'(x)\varphi_3'(x)+2\varphi_1(x)\varphi_3(x)\right\}dx=-\frac{243}{560}$$

$$a_{41}=a_{14}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_1'(x)\varphi_4'(x)+2\varphi_1(x)\varphi_4(x)\right\}dx=-\frac{131}{4480}$$

$$a_{22}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_2'(x)\varphi_2'(x)+2\varphi_2(x)\varphi_2(x)\right\}dx=\frac{631}{280}$$

$$a_{23}=a_{32}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_2'(x)\varphi_3'(x)+2\varphi_2(x)\varphi_3(x)\right\}dx=-\frac{23}{320}$$

$$a_{24}=a_{42}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_2'(x)\varphi_4'(x)+2\varphi_2(x)\varphi_4(x)\right\}dx=-\frac{859}{1120}$$

$$a_{33}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_3'(x)\varphi_3'(x)+2\varphi_3(x)\varphi_3(x)\right\}dx=\frac{449}{80}$$

$$a_{43}=a_{34}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_3'(x)\varphi_4'(x)+2\varphi_3(x)\varphi_4(x)\right\}dx=\frac{2797}{896}$$

$$a_{44}=\int_0^1\left\{x^2\varphi_4'(x)\varphi_4'(x)+2\varphi_4(x)\varphi_4(x)\right\}dx=\frac{1483}{280}$$

والشعاع b عناصره هي:

$$b_i=\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx$$

$$b_0=-4\int_0^1 x^2\varphi_0(x)dx=-\frac{7}{480}$$

$$b_1=-4\int_0^1 x^2\varphi_1(x)dx=-\frac{239}{1920}$$

$$b_2=-4\int_0^1 x^2\varphi_2(x)dx=-\frac{13}{32}$$

$$b_3=-4\int_0^1 x^2\varphi_3(x)dx=-\frac{1439}{1920}$$

$$b_4=-4\int_0^1 x^2\varphi_4(x)dx=-\frac{35}{96}$$

فنحصل على جملة معادلات خطية تكتب بالشكل المصفوفي Ax=b حيث:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{11}{56} & \frac{193}{896} & -\frac{103}{1120} & -\frac{47}{4480} & 0\\ \frac{193}{896} & \frac{89}{80} & \frac{49}{320} & -\frac{243}{560} & -\frac{131}{4480}\\ -\frac{103}{1120} & \frac{49}{320} & \frac{631}{280} & -\frac{23}{320} & -\frac{859}{1120}\\ -\frac{47}{4480} & -\frac{243}{560} & -\frac{23}{320} & \frac{449}{80} & \frac{2797}{896}\\ 0 & -\frac{131}{4480} & -\frac{859}{1120} & \frac{2797}{896} & \frac{1483}{280}\end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -\frac{7}{480} \\ -\frac{239}{1920} \\ -\frac{13}{32} \\ -\frac{1439}{1920} \\ -\frac{35}{96} \end{pmatrix}$$

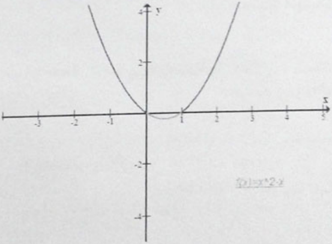
بحلها نجد الثوابت:

$$c_0 = -\frac{1}{72}, c_1 = -\frac{5}{36}, c_2 = -\frac{13}{72}, c_3 = -\frac{5}{36}, c_4 = -\frac{1}{72}$$

فالحل العام هو:

$$\phi = \sum_{i=0}^{4} c_i \phi_i = x^2 - x$$

نلاحظ أن الحل التقريبي تطابق مع الحل الفعلي وقد حصل هذا كون الحل الفعلي حدودية من درجة أقل من درجة دوال القاعدة فلو كان دالة أسية أو لوغاريتمية أو كسرية أو جيبية أو حدودية من درجة أعلى لكان قريبا منه ولكن لن يتطابق معه.



محاسن ومساوئ طريقة رايلي:

المحاسن:

توفر الكثير من العمل بتجنب العمل المباشر مع أولر – لاغرانج وهذا ناتج عن كون طريقة رايلي ريتز تخفض المسألة إلى إيجاد قيم المعاملات التي تجعل التكامل أصغريا والتي يمكن إيجادها بحسابات تفاضلية (تكاملات) نستطيع التعامل معها ومهما كان عدد المعاملات كبيرا فإنه يمكن التعامل معها حاسوبيا.

المساوئ:

- إن هذه الطريقة تقريبية فنحن لازلنا عاجزين عن إيجاد الحل الدقيق.
- لا توجد آلية محددة لاختيار توابع الاختبار.
- لا توجد طريقة عامة لمعرفة الدقة التي توصلنا إليها.

طريقة غالركين

The Galerkin Method

لندرس مسألة القيم الحدية التالية:

$$(1) \quad \dots \quad -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u'+r(x)u=f(x)$$
$$u(0)=u(1)=0 \quad 0\le x\le 1$$

وحيث:

$$\forall x\in[0,1] \quad q(x)\ge 0 \quad \exists\delta>0; \quad p(x)\ge 0$$
$$p,q,r,f\in C[0,1]$$

تتلخص طريقة غالركين في الخطوات التالية:

ايجاد الصيغة الضعيفة للمسألة:

نضرب طرفي المعادلة (1) بتابع $v\in C^1[0,1]$ (تابع وزن) وبالمكاملة على المجال [0,1] نحصل على:

$$\int_0^1 p u' v' dx+\int_0^1 q u' v dx+\int_0^1 r u v dx=\int_0^1 f v dx+[p u' v']_0^1$$

وذلك بالمكاملة بالتجزئة.

واذا فرضنا v(0)=v(1)=0 نجد:

$$\int_0^1 p u' v' dx+\int_0^1 q u' v dx+\int_0^1 r u v dx=\int_0^1 f v dx$$

سنرمز ب V لفضاء توابع الاختبار أي فضاء كل التوابع المستمرة والمحققة للشروط الحدية والتي مشتقاتها الأولى مستمرة قطعيا.

إن V هو فضاء متجهي يرمز له ب $H_0^1(0,1)$.

$$H_0^1(0,1)=\{v\in L^2(0,1):v'\in L^1(0,1),v(0)=v(1)=0\}$$

وكل حل y ل (1) هو أيضا حل للمسألة التالية:

$$(4) \quad \dots \quad find \quad v\in V:\alpha\langle u,v\rangle=\langle f,v\rangle;\forall v\in V$$

حيث:

$$(5) \quad \alpha\langle u,v\rangle=\int_0^1 p u v dx+\int_0^1 q u v dx+\int_0^1 r u v dx$$
$$\langle f,v\rangle=\int_0^1 f v dx$$

إن $\alpha\langle .,.\rangle$ هو شكل خطاني خطي بالنسبة لكل من متغيريه.

الصيغة (4) هي الصيغة الضعيفة للمسألة ونلاحظ أنها لا تحوي إلا المشتق الأول للتابع المجهول.

اختيار توابع القاعدة:

نأخذ V_h فضاء متجهي جزئي من V منتهي البعد ونحول مسألة غالركين إلى:

$$(6) \quad \dots \quad find \quad u_h \in V_h : \alpha\langle u_h, v_h\rangle = \langle f, v_h\rangle ; \forall v_h \in V_h$$

وهي مسألة منتهية البعد، ونرمز ب $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ لمجموعة التوابع المستقلة خطيا من V_h (قاعدة V_h).

تقريب الحل:

نبحث عن حل من الشكل $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$ حيث n بعد الفضاء المتجهي الجزئي V_h

.

اختيار تابع الوزن:

بما أن الصيغة الضعيفة محققة لأجل أي $v \in V_h$ إذا يمكن أن نختار n تابع وزن $v_1, v_2, \dots, v_n$ بحيث يتحقق:

$$\alpha\langle u, v_i\rangle = \langle f, v_i\rangle \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha\langle u, v_i\rangle = \int_0^1 p\, u' v_i' dx + \int_0^1 q\, u' v_i dx + \int_0^1 r\, u v_i dx$$

$$\langle f, v_i\rangle = \int_0^1 f\, v_i dx$$

وتقوم فكرة غالركين على اختيار توابع الوزن مساوية لتوابع الاختبار أي $v_i = \varphi_i$ ومنه:

$$\alpha\langle u, \varphi_i\rangle = \langle f, \varphi_i\rangle \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وبما أن $u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$ بالتعويض نجد:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \alpha\langle \varphi_j, \varphi_i\rangle = \langle f, \varphi_i\rangle \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وهكذا أصبحت المسألة تعيين الثوابت $u_1, u_2, \dots, u_n$ من جملة المعادلات الخطية السابقة.

بعد الشكل المصفوفي:

من المعادلات الأخيرة:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \alpha\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle=\langle f,\varphi_i\rangle \quad i=1,2,\dots,n$$

لو وضعنا:

$$a_{ij}=\alpha\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle=\int_0^1 p.\varphi_j'.\varphi_i' dx+\int_0^1 q.\varphi_j'.\varphi_i dx+\int_0^1 r.\varphi_j.\varphi_i dx$$

و يكون:

$$b_i=\langle f,\varphi_i\rangle=\int_0^1 f\,\nu_i dx$$

عندئذ يمكن كتابة جملة المعادلات الجبرية بالشكل المصفوفي التالي:

$$AU=B$$

حيث:

$$B=(b_i)=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix} \quad \& \quad A=(a_{ij})_{n\times n}$$

$$U=\begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_n \end{pmatrix}$$

نسمي A مصفوفة الصلابة ونسمي b متجه الحمولة.

حل الجملة المصفوفية:

نحل الجملة المصفوفية لتعيين الثوابت المجهولة $u_1,u_2,\dots,u_n$ والحصول على الحل المطلوب.

نتيجة:

إذا أردنا الحل باستخدام طريقة غالركين يكفي أن نقوم باختيار مناسب لتوابع القاعدة (الاختبار) ثم حل الشكل المصفوفي للمسألة.

ملاحظة:

إن بنية مصفوفة الصلابة A وكذلك دقة التقريب $u(x)=\sum_{j=1}^{n} u_j\varphi_j(x)$ تعتمد على اختيار التوابع $\varphi_j(x)$.

مثال:

أوجد حل المسألة الحدية التالية باستخدام طريقة غاليركين:

$$-\frac{d}{dx}(xy')+4y=4x^2-8x+1$$

$y(0)=y(1)=0$ ثم قارن مع الحل الفعلي $y(x)=x^2-2$.

الحل:

باختيار $\varphi_i(x)=x(x-1)^i$ كتوابع اختبار وأخذ n=2 يكون الحل المطلوب

$$y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$$

ولتعيين الثوابت لدينا:

$$p(x)=x \quad q(x)=0 \quad r(x)=4 \quad f(x)=4x^2-8x+1$$

$$\varphi_i'(x)=i(x-1)^{i-1}$$

ولنوجد المعادلة المصفوفية لهذه المسألة:

$$b_i=\int_0^1 f(x).\varphi_i'(x)dx=\int_0^1(4x^2-8x+1)(x-1)^i dx \quad i=1,2$$

$$b_1=\int_0^1(4x^2-8x+1)(x-1)dx$$

$$=\int_0^1(4x^3-12x^2+9x-1)dx$$

$$=\left[x^4-4x^3+\frac{9}{2}x^2-x\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$b_2=\int_0^1(4x^2-8x+1)(x-1)^2dx$$

$$=\int_0^1(4x^4-16x^3+21x^2-10x+1)dx$$

$$=\left[\frac{4}{5}x^5-4x^4+7x^3-5x^2+x\right]_0^1=-\frac{1}{5}$$

$$a_{ij}=\int_0^1 p.\varphi_j'.\varphi_i'dx+\int_0^1 q.\varphi_j'.\varphi_i dx+\int_0^1 r.\varphi_j.\varphi_i dx$$

$$a_{11}=\int_0^1\left[-p'(x).\varphi_1(x).\varphi_1'(x)-p(x).\varphi_1(x).\varphi_1''(x)+q(x).\varphi_1(x).\varphi_1(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[-(x-1)-0+4(x-1)^2\right]dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+5x\right]_0^1=\frac{11}{6}$$

$$a_{12}=\int_0^1\left[-p'(x).\varphi_1(x).\varphi_2'(x)-p(x).\varphi_1(x).\varphi_2''(x)+q(x).\varphi_1(x).\varphi_2(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[-2(x-1)^2-2x(x-1)+4(x-1)^3\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[4x^3-4x^2+6x-6\right]dx$$

$$=\left[x^4-\frac{4}{3}x^3+3x^2-6x\right]_0^1=-\frac{10}{3}$$

$$a_{21}=\int_0^1[-p'(x).\varphi_2(x).\varphi_1'(x)-p(x).\varphi_2(x).\varphi_1''(x)+q(x).\varphi_2(x).\varphi_1(x)]dx$$

$$=\int_0^1\left[-(x-1)^2-0+4(x-1)^3\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[4x^3-13x^2+14x-5\right]dx$$

$$=\left[x^4-\frac{13}{3}x^3+7x^2-5x\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

$$a_{22}=\int_0^1[-p'(x).\varphi_2(x).\varphi_2'(x)-p(x).\varphi_2(x).\varphi_2''(x)+q(x).\varphi_2(x).\varphi_2(x)]dx$$

$$=\int_0^1\left[-2(x-1)^2-2x(x-1)^2+4(x-1)^4\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[4x^4-20x^3+34x^2-24x+6\right]dx$$

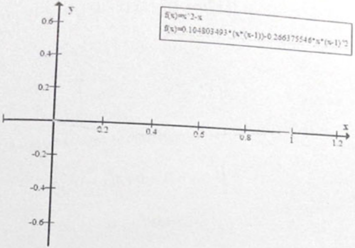
$$=\left[\frac{4}{5}x^5-5x^4-\frac{34}{3}x^3-12x^2+6x\right]_0^1=\frac{17}{15}$$

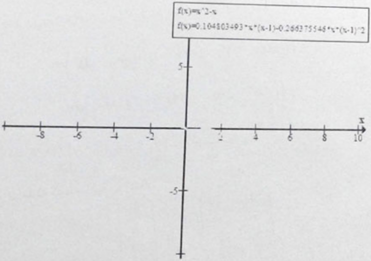
ومنه تصبح المعادلة المصفوفية Ac=b:

$$\begin{pmatrix}\frac{11}{6} & -\frac{10}{3}\\ \frac{5}{3} & \frac{17}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

وبحلها نجد:

$$c_1=\frac{72}{687}\approx 0.104803493 \quad c_2=-\frac{183}{687}\approx -0.266375546$$





مثال:

أوجد حل المسألة الحدية التالية باستخدام طريقة غاليركين:

$$-\frac{d}{dx}\left(x^2 y'\right) + x y' = x^2$$

$. \; y(0) = y(1) = 0$

الحل:

باختيار $\varphi_i(x) = x(x-1)^i$ كتوتبع اختبار وأخذ n=2 يكون الحل المطلوب

$$y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$$

ولتعين الثوابت لدينا:

$$p(x)=x^2 \quad q(x)=x \quad r(x)=0 \quad f(x)=x^2$$
$$\varphi_i'(x)=i(x-1)^{i-1}$$

ولنوجد المعادلة المصفوفية لهذه المسألة:

$$b_i=\int_0^1 f(x).\varphi_i'(x)dx=\int_0^1 x^2(x-1)^i dx \quad i=1,2$$

$$b_1=\int_0^1 x^2(x-1)dx$$

$$=\int_0^1 (x^3-x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{-1}{12}$$

$$b_2=\int_0^1 x^2(x-1)^2dx$$

$$=\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{30}$$

$$a_{ij}=\int_0^1 p.\varphi_j'.\varphi_i'dx+\int_0^1 q.\varphi_j'.\varphi_i dx+\int_0^1 r.\varphi_j.\varphi_i dx$$

$$a_{11}=\int_0^1[-p'(x).\varphi_1(x).\varphi_1'(x)-p(x).\varphi_1(x).\varphi_1''(x)+q(x).\varphi_1(x).\varphi_1(x)]dx$$

$$=\int_0^1\left[-2x(x(x-1))-0+x(x^2(x-1)^2)\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{11}{60}$$

$$a_{12}=\int_0^1[-p'(x).\varphi_1(x).\varphi_2'(x)-p(x).\varphi_1(x).\varphi_2''(x)+q(x).\varphi_1(x).\varphi_2(x)]dx$$

$$=\int_0^1\left[-2x(2x(x-1)^2)-x^2(2x(x-1))+x(x^2(x-1)^3)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^6-3x^5-3x^4+9x^3-4x^2\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{2}x^6-\frac{3}{5}x^5+\frac{9}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{17}{420}$$

$$a_{21}=\int_0^1\left[-p'(x).\varphi_2(x).\varphi_1'(x)-p(x).\varphi_2(x).\varphi_1''(x)+q(x).\varphi_2(x).\varphi_1(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[-2x\left(x(x-1)^2\right)-0+x\left(x^2(x-1)^3\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^6-5x^5+7x^4-2x^3\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{7}x^7-\frac{5}{6}x^6+\frac{7}{5}x^5-\frac{2}{4}x^4\right]_0^1=\frac{22}{105}$$

$$a_{22}=\int_0^1\left[-p'(x).\varphi_2(x).\varphi_2'(x)-p(x).\varphi_2(x).\varphi_2''(x)+q(x).\varphi_2(x).\varphi_2(x)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[-2x\left(2x(x-1)^3\right)-2x^2\left(x(x-1)^2\right)+x\left(x^2(x-1)^4\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[x^7-4x^6+12x^4-x^3-8x^2\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{8}x^8-\frac{4}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{809}{840}$$

ومنه تصبح المعادلة المصفوفية Ac=b:

$$\begin{pmatrix}\frac{11}{60} & -\frac{17}{420}\\ \frac{22}{105} & -\frac{809}{840}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}\\ \frac{1}{30}\end{pmatrix}$$

وبحلها نجد:

$$c_1=-\frac{3199}{68882}\approx-0.0464417 \quad c_2=-\frac{140}{3131}\approx-0.0447141$$

مقدمة:

إن طريقة العناصر المنتهية ما هي إلا تقنية عددية لحل مسائل القيم الحدية والعديد من مسائل الميكانيك الصلب والبنيوي في الهندسة. وقد ظهرت هذه الطريقة في مجال صناعة الطيران وذلك في أوائل خمسينات القرن الماضي. وفي الستينيات تبين أن طريقة العناصر المنتهية هي شكل آخر لطريقة رايلي ريتز مما وسع من مجالات تطبيقها وفيما بعد تبين أنه يمكن استنتاج هذه الطريقة من العديد من الطرق مثل طريقة غالركين أو طريقة المربعات الصغرى.

الفكرة العامة:

استبدال تابع مستمر على حقل متصل له عدد لا نهائي من درجات الحرية بنظام متقطع حيث يقرب هذا التابع بمجموعة من التوابع المستمرة قطعيا والتي تملك عددا منتهيا من درجات الحرية.

ونسعى في هذه الطريقة للحصول على جملة من المعادلات الجبرية التي يعطي حلها التقريب المطلوب.

خطوات طريقة العناصر المنتهية:

سندرس طريقة العناصر المنتهية في بعد واحد وبشكل عام توجد ستة خطوات لطريقة العناصر المنتهية:

١) التقطيع:

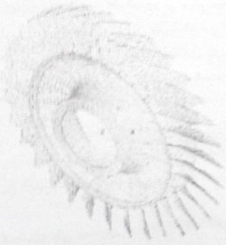
وهي أهم ما يميز هذه الطريقة حيث تجزئ الساحة المدروسة إلى عدد منته من الساحات الجزئية ذات الأشكال الهندسية البسيطة. ونسمي هذه الساحات البسيطة "العناصر" كما نسمي رؤوس العناصر التي تربط العناصر ببعضها "العقد" وبهذا نكون قد حولنا الساحة المدروسة إلى شبكة من العناصر البسيطة.

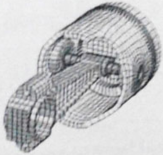
وعند القيام بالتقطيع يجب علينا القيام بما يلي:

a) اختيار الشكل المناسب للعناصر.
b) تحديد الخصائص الملائمة لكل عنصر (الطول، المساحة، ...).
c) تحديد عدد العناصر وتوزيعها بشكل جيد.

كما لا يشترط عند تقطيع الساحة أن تكون العناصر متشابهة أو منتظمة،،
وفي الواقع تعتبر هذه العملية جوهر طريقة العناصر المنتهية،

فقد أصبح بالإمكان التعامل مع الهندسات المختلفة مهما كانت معقدة،





إلا أن فوائد هذه الخاصية الهامة جدا للعناصر المنتهية لا تظهر كثيرا في البعد الواحد لا تكون معقدة.

في مسألتنا نجزئ المجال [0,1] إلى n مجال جزئي (عنصر) باستخدام العقد:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$$

فيكون لكل عنصر الشكل $I_j = \left[x_{j-1}, x_j\right]$ وطوله $h_j = x_j - x_{j-1}$ تسمى عملية تقطيع الساحة ب "meshing".

٢) إيجاد معادلات كل عنصر:

وسنستفيد في ذلك من طريقة غالركين حيث سنطبقها على كل عنصر.

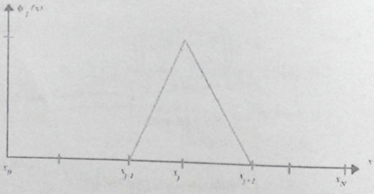
أولا- نختار توابع القاعدة (الاختبار):

والفكرة الأساسية في العناصر المنتهية هي إبقاء التوابع أبسط ما يمكن لذلك سنختارها حدوديات خطية قطعيا (توابع القبعة)

نختار n تابع قبعة (لاحظ أن عددها مساو لعدد العناصر) كما يلي:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

فيكون لها الشكل:



ملاحظات:

- كلتابع قبعة $\varphi_i(x)$ يكون معدوما على كامل المجال [0,1] باستثناء على المجال $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.
- كل تابع قبعة $\varphi_i(x)$ يأخذ قيما غير صفرية على عنصرين $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $I_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]$.
- عند العقد يتحقق ما يلي $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.
- من أجل كل عدد $j = 1, 2, ..., n$ توابع القبعة التي تأخذ قيم غير صفرية على

العنصر $\left[x_{j-1},x_j\right]=I_j=j$ هي فقط $\varphi_{j-1}(x),\varphi_j(x)$.

ثانيا – نريد الآن إيجاد المعادلات المصفوفية عند كل عنصر:

$$j=I_j=\left[x_{j-1},x_j\right]\quad (j=1,2,\dots,n)$$

الحل على كل عنصر $\left[x_{j-1},x_j\right]=I_j=j$ يكون:

$$u^j(x)=\sum_{j=1}^{n}u_j\varphi_j(x)=u_{j-1}\varphi_{j-1}(x)+u_j\varphi_j(x)$$

وذلك لأن باقي توابع القاعدة تنعدم على هذا العنصر

ومنه تصبح عناصر المصفوفة A للعنصر $\left[x_{j-1},x_j\right]=I_j=j$ كما يلي، لدينا:

$$a_{ik}=\alpha\langle\varphi_k,\varphi_i\rangle=\int_0^1 p\varphi_k'\varphi_i'dx+\int_0^1 q\varphi_k'\varphi_i dx+\int_0^1 r\varphi_k\varphi_i dx$$

ومنه:

$$a_{ik}^j=\int_{x_{j-1}}^{x_j}p(\varphi_k)'(\varphi_i)'dx+\int_{x_{j-1}}^{x_j}q(\varphi_k)'\varphi_i dx+\int_{x_{j-1}}^{x_j}r\varphi_k\varphi_i dx$$

وأيضا على العناصر $\left[x_{j-1},x_j\right]=I_j=j$ تكون كل توابع القيمة معدومة باستثناء $\varphi_{j-1}(x),\varphi_j(x)$ ومنه $i,k\in\{j,j-1\}$ وبهذا تكون مصفوفة الصلابة لكل عنصر بالشكل:

$$A^j=\left(\begin{bmatrix}a_{j-1j-1}^j & a_{j-1j}^j\\ a_{jj-1}^j & a_{jj}^j\end{bmatrix}\right)$$

ولإيجاد متجه الحمولة للعنصر $\left[x_{j-1},x_j\right]=I_j=j$ لدينا:

$$b_i=\langle f,\varphi_i\rangle=\int_0^1 f\,.\varphi_i dx$$

وبالتالي:

$$b_i^j=\int_{x_{j-1}}^{x_j}f\,.\varphi_i dx\quad (i=j-1,j)$$

$$B^j=\begin{pmatrix}b_{j-1}^j\\ b_j^j\end{pmatrix}$$

٣) التجميع:

نضع مصفوفات العناصر في مصفوفة كلية للحصول على جملة معادلات مصفوفية شاملة وذلك كما يلي:

للحصول على مصفوفة الصلابة العامة لدينا الحل المطلوب من الشكل:

$$a_{ik} = \alpha\langle \varphi_k , \varphi_i \rangle = \int_0^1 p\varphi_k' \varphi_i' dx + \int_0^1 q\varphi_k' \varphi_i dx + \int_0^1 r\varphi_k \varphi_i dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} p\varphi_k' \varphi_i' dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\varphi_k' \varphi_i dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} r\varphi_k \varphi_i dx \right]$$

وبشكل عام إن حدود هذه التكاملات لا تنعدم عندما i=k-1, k, k+1 وهذا يعني أن عناصر المصفوفة غير الصفرية هي فقط عناصر القطر الرئيسي وتحته.

وهذا يجعل مصفوفة الصلابة شبه قطرية من الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & & & & \\ * & * & * & 0 & \cdots & & 0 & \\ 0 & * & * & * & & & & \\ 0 & 0 & * & * & & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & * & * & 0 & 0 \\ & & & & * & * & * & 0 \\ & 0 & & \cdots & 0 & * & * & * \\ & & & & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

❖ من أجل i=k:

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} p\varphi_i' \varphi_i' dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\varphi_i' \varphi_i dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} r\varphi_i \varphi_i dx \right]$$

وبملاحظة أن حدود المجموع تنعدم كلها ما عدا الموافقة لـ j=i, i+1 يكون:

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p\varphi_i' \varphi_i' dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_i' \varphi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} r\varphi_i \varphi_i dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} p\varphi_i' \varphi_i' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q\varphi_i' \varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} r\varphi_i \varphi_i dx$$

ولدينا:

$$a_{ik}^j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(\varphi_k)'(\varphi_i)' dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} q(\varphi_k)' \varphi_i dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} r\varphi_k \varphi_i dx$$

ومنه:

$$a_{ii} = a_{ii}^j + a_{ii}^{j+1}$$

❖ من أجل i=k-1:

$$a_{kk-1} = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} p\varphi_k' \varphi_{k-1}' dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\varphi_k' \varphi_{k-1} dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} r\varphi_k \varphi_{k-1} dx \right]$$

ونلاحظ أن حدود المجموع تنعدم كلها ما عدا الموافقة ل j=k وبالتالي:

$$a_{kk-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} p\varphi_k'\varphi_{k-1}'dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} q\varphi_k'\varphi_{k-1}dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} r\varphi_k\varphi_{k-1}dx = a_{k-1k}^{k}$$

❖ من أجل i=k+1 :

$$a_{k+1k} = \sum_{j=1}^{n}\left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} p\varphi_k'\varphi_{k+1}'dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\varphi_k'\varphi_{k+1}dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} r\varphi_k\varphi_{k+1}dx\right]$$

ونلاحظ أن حدود المجموع تنعدم كلها ما عدا الموافقة ل j=k+1 وبالتالي:

$$a_{k+1k} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p\varphi_k'\varphi_{k+1}'dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} q\varphi_k'\varphi_{k+1}dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} r\varphi_k\varphi_{k+1}dx = a_{k+1k}^{k+1}$$

ومصفوفة الصلابة من الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & & 0 & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & * & & & & \\ 0 & 0 & * & * & & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & & * & * & 0 & 0 \\ & & & & & * & * & a_{n-2n-1} & 0 \\ & 0 & & & \cdots & 0 & * & * & a_{n-1n} \\ & & & & & 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

إن العلاقات الأخيرة تعني أن كل عنصر من عناصر المصفوفة الكلية هو مجموع لعناصر المصفوفات الجزئية المقابلة له.

وهكذا نحصل على مصفوفة الصلابة العامة وكذلك بالنسبة لمتجه الحمولة الكلي الذي تعطى عناصره كما يلي:

$$b_i = \langle f, \varphi_i \rangle = \int_0^1 f(x).\varphi_i(x)dx \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x).\varphi_i(x)dx$$

ولكن:

$$b_i^j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f.\varphi_i dx$$

والذي لا يكون معدوما فقط عندما j=i, i+1 :

أي أن :

$$b_i = b_i^i + b_i^{i+1} \quad i = 1, 2, ..., n$$

وعليه فإن متجه الحمولة الكلي يكون له الشكل:

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 + b_1^2 \\ b_2^2 + b_2^3 \\ \vdots \\ b_n^n + b_n^{n+1} \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

الحل المطلوب هو

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$$

ويكون على كل عنصر $j = I_j = [x_{j-1}, x_j]$ بالشكل:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x) = u_{j-1}^j \varphi_{j-1}^j(x) + u_j^j \varphi_j^j(x)$$

ولهذا لا يمكن حساب الثوابت المجهولة $u_1, u_2, ..., u_n$ من المعادلات المصفوفية للعناصر.

٤) تطبيق الشروط الحدية:

لدينا y(0)=y(1)=0 الحل المطلوب $u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$ ونلاحظ أن $u(x_i) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x_i) = u_i$ وذلك لأن $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ إذا الثوابت التي نبحث عنها ما هي إلا قيم الحل التقريبي عند العقد وبتطبيق الشروط الحدية نجد $u_0 = u_n = 0$ نعوض هذه القيم في المصفوفة الكلية فتصبح الجملة المصفوفية لدينا:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & & & & & \\ * & * & * & 0 & \cdots & & 0 & & \\ 0 & * & * & * & & & & & \\ 0 & 0 & * & * & & & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & * & * & 0 & 0 \\ & & & & & * & * & * & 0 \\ & 0 & & & \cdots & 0 & * & * & * \\ & & & & & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \\ \vdots \\ \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

٥) تعيين الثوابت:

بحل الجملة المصفوفية الأخيرة يمكننا حساب قيم الثوابت (والتي هي قيم الحل الفعلي عند العقد).
وقد درسنا سابقا بعض الطرق لحل جملة معادلات جبرية.

٦) تعيين الحل:
بعد إنجاز الخطوات السابقة نكون قد أوجدنا الحل التقريبي الذي يتطابق مع الحل الفعلي عند العقد وذلك باستخدام حدوديات خطية قطعيا كتوابع قاعدة.

مثال:

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y'' - y = -x \quad 0 \le x \le 1$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

وذلك باستخدام العناصر المنتهية وتوابع قاعدة خطية قطعيا، ثم قارن مع الحل الفعلي $y = x - \dfrac{\sinh x}{\sinh 1}$.

الحل:

نلاحظ أن:

$$p(x)=1 \quad q(x)=0 \quad r(x)=1 \quad f(x)=x$$

أولا باستخدام العقد:

$$0 = x_0 < x_1 = 0.2 < x_2 = 0.4 < x_3 = 0.6 < x_4 = 0.8 < x_5 = 1$$

نقسم المجال المعطى إلى 5 عناصر:

$$I_1 = [x_0, x_1] = [0, 0.2]$$
$$I_2 = [x_1, x_2] = [0.2, 0.4]$$
$$I_3 = [x_2, x_3] = [0.4, 0.6]$$
$$I_4 = [x_3, x_4] = [0.6, 0.8]$$
$$I_5 = [x_4, x_5] = [0.8, 1]$$

إن طول كل عنصر هو h=0.2.

ثانيا نختار توابع القاعدة (توابع القبعة)

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \begin{cases} 0 & x \notin [0, 0.4] \\ \dfrac{x}{0.2} & x \in [0, 0.2] \\ \dfrac{0.4 - x}{0.2} & x \in [0.2, 0.4] \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} 0 & x \notin [0.2, 0.6] \\ \dfrac{x - 0.2}{0.2} & x \in [0.2, 0.4] \\ \dfrac{0.6 - x}{0.2} & x \in [0.4, 0.6] \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} 0 & x \notin [0.4, 0.8] \\ \dfrac{x - 0.4}{0.2} & x \in [0.4, 0.6] \\ \dfrac{0.8 - x}{0.2} & x \in [0.6, 0.8] \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \begin{cases} 0 & x \notin [0.6, 1] \\ \dfrac{x - 0.6}{0.2} & x \in [0.6, 0.8] \\ \dfrac{1 - x}{0.2} & x \in [0.8, 1] \end{cases}$$

ونبحث عن حل من الشكل:

$$y(x) = y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + y_3\varphi_3(x) + y_4\varphi_4(x)$$

ثالثا إيجاد معادلات كل عنصر

تعطى معادلة كل عنصر ب AY=B حيث مصفوفة الصلابة للعنصر j تعطى ب

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{j-1j-1} & a_{j-1j} \\ a_{jj-1} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

حيث:

$$a_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j' \varphi_i' dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j \varphi_i dx$$

ومتجه الحمولة يعطى ب $B = \begin{pmatrix} b_{j-1} \\ b_j \end{pmatrix}$.

حيث:

$$b_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} x \varphi_j dx$$

فيكون لدينا:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = (a_{11}) = (5.0666667)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5.0666667 & 5.0666667 \\ -5.0666667 & -5.0666667 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5.0666667 & -5.0666667 \\ -5.0666667 & 5.0666667 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 5.0666667 & -5.0666667 \\ -5.0666667 & 5.0666667 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = (a_{44}) = (5.0666667)$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = (b_1) = (0.02)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.06 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = (b_4) = (0.08)$$

رابعا التجميع:

$$A = \begin{pmatrix} 10.1333333 & -5.0666667 & 0 & 0 \\ -5.0666667 & 10.1333333 & -5.0666667 & 0 \\ 0 & -5.0666667 & 10.1333333 & -5.0666667 \\ 0 & 0 & -5.0666667 & 10.1333333 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

فتكون المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} 10.1333333 & -5.0666667 & 0 & 0 \\ -5.0666667 & 10.1333333 & -5.0666667 & 0 \\ 0 & -5.0666667 & 10.1333333 & -5.0666667 \\ 0 & 0 & -5.0666667 & 10.1333333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

والتي تعطي جملة المعادلات:

$$10.1333333y_1 - 5.0666667y_2 = 0.04$$
$$-5.0666667y_1 + 10.1333333y_2 - 5.0666667y_3 = 0.08$$
$$-5.0666667y_2 + 10.1333333y_3 - 5.0666667y_4 = 0.12$$
$$-5.0666667y_3 + 10.1333333y_4 = 0.16$$

خامسا حل الجملة المصفوفية وإيجاد التقريب

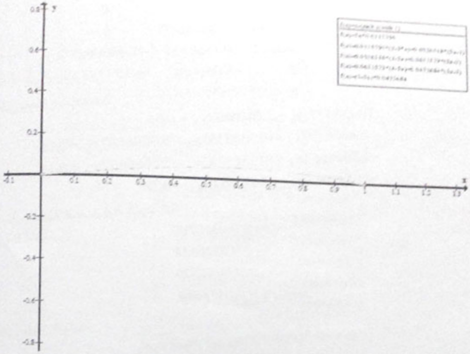
$$y_1 = 0.0315790$$
$$y_2 = 0.0526318$$
$$y_3 = 0.0631579$$
$$y_4 = 0.0473684$$

وبالتالي يكون الحل:

$$y = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + y_3\varphi_3 + y_4\varphi_4$$

وبالمقارنة مع الحل الفعلي نجد:

X	الحل التقريبي	الحل الفعلي
0.1	0.0157895	0.0147379
0.2	0.0315790	0.02871
0.5	0.07105265	0.0565861
0.625	0.0611842125	0.5578625
0.9	0.0236842	0.0265317



مصادر الخطأ في طريقة العناصر المنتهية:

هناك ثلاثة مصادر رئيسية للخطأ في حلول هذه الطريقة:

- أخطاء ناتجة عن تقريب الساحة المدروسة.
- أخطاء تنتج عن تقريب الحل تنتج من اختيار عناصر لا تصف تماما المسألة الفيزيائية.

مثل اختيار توابع خطية في حين يجب أن تكون تربيعية أو تكعيبية أو استخدام السلوك الخطي في حين المسألة ليست كذلك.

- أخطاء عددية وهي تظهر كنتيجة للحسابات العددية وتتضمن أخطاء القطع والتدوير.

من أجل زيادة الدقة ....

١. نزيد من عدد العقد.

٢. نستخدم توابع قاعدة أفضل.

٣. في بعدين أو ثلاثة يمكن تحسين العناصر.

مثال:

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y'' = a \quad 0 < x < 1$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

باستخدام توابع القبعة كتوابع قاعدة وباستخدام ثلاث عقد ثم باستخدام خمس عقد.

الحل:

نلاحظ أن:

$$p(x)=1 \quad q(x)=0 \quad r(x)=0 \quad f(x)=-a$$
$$0=x_0<x_1=0.5<x_2=1$$

نقسم المجال المعطى إلى عنصرين:

$$I_1=[x_0,x_1]=[0,0.5]$$
$$I_2=[x_1,x_2]=[0.5,1]$$

إن طول كل عنصر هو h=0.5.

ثانيا نختار توابع القاعدة (توابع القبعة)

ولدينا هنا تابع قبعة وحيد

$$\varphi_i=\begin{cases} 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}] \\ \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x\in[x_i,x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_1=\begin{cases} 0 & x\notin[0,1] \\ \dfrac{x}{0.5} & x\in[0,0.5] \\ \dfrac{1-x}{0.5} & x\in[0.5,1] \end{cases}$$

ونبحث عن حل من الشكل $y(x)=y_1\varphi_1(x)$.

ثالثا إيجاد معادلات كل عنصر

تعطى معادلة كل عنصر ب AY=B حيث مصفوفة الصلابة للعنصر j تعطى ب:

$$A^j=\begin{pmatrix} a_{j-1j-1} & a_{j-1j} \\ a_{jj-1} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

حيث:

$$a_{ij}=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi'_j\varphi'_i dx$$

ومتجه الحمولة يعطى ب $B=\begin{pmatrix} b_{j-1} \\ b_j \end{pmatrix}$ حيث:

$$b_j = \int_{x_{j-1}} -a\varphi_j dx$$

فيكون لدينا:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = (a_{11}) = (2)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}) = (2)$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = (b_1) = \left(-\frac{a}{4}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (b_1) = \left(-\frac{a}{4}\right)$$

رابعا التجميع:

$$A = \left(a_{11}^1 + a_{11}^2\right) = (4)$$

$$B = \left(b_1^1 + b_1^2\right) = \left(-\frac{a}{4} - \frac{a}{4}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)$$

فتكون المعادلة المصفوفية:

$$(4)(y_1) = \left(-\frac{a}{2}\right)$$

خامسا حل الجملة المصفوفية وإيجاد التقريب

$$y_1 = -\frac{a}{8}$$

وبالتالي يكون الحل

$$y = -\frac{a}{8}\varphi_1$$

ثانيا باستخدام العقد

$$0 = x_0 < x_1 = 0.25 < x_2 = 0.50 < x_3 = 0.75 < x_4 = 1$$

نقسم المجال المعطى إلى 4 عناصر:

$$I_1 = [x_0, x_1] = [0, 0.25]$$
$$I_2 = [x_1, x_2] = [0.25, 0.50]$$
$$I_3 = [x_2, x_3] = [0.50, 0.75]$$
$$I_4 = [x_3, x_4] = [0.75, 1]$$

إن طول كل عنصر هو h=0.25.

ثانيا نختار توابع القاعدة (توابع القبعة)

$$\varphi_i=\begin{cases}0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x\in[x_i,x_{i+1}]\end{cases}$$

$$\varphi_1=\begin{cases}0 & x\notin[0,0.50]\\ \dfrac{x}{0.25} & x\in[0,0.25]\\ \dfrac{0.5-x}{0.25} & x\in[0.25,0.50]\end{cases}$$

$$\varphi_2=\begin{cases}0 & x\notin[0.25,0.75]\\ \dfrac{x-0.25}{0.25} & x\in[0.25,0.50]\\ \dfrac{0.75-x}{0.25} & x\in[0.50,0.75]\end{cases}$$

$$\varphi_3=\begin{cases}0 & x\notin[0.50,1]\\ \dfrac{x-0.50}{0.25} & x\in[0.50,0.75]\\ \dfrac{1-x}{0.25} & x\in[0.75,1]\end{cases}$$

ونبحث عن حل من الشكل:

$$y(x)=y_1\varphi_1(x)+y_2\varphi_2(x)+y_3\varphi_3(x)$$

ثالثا إيجاد معادلات كل عنصر

تعطى معادلة كل عنصر ب AY=B حيث مصفوفة الصلابة للعنصر j تعطى ب

$$A^j=\begin{pmatrix}a_{j-1j-1} & a_{j-1j}\\ a_{jj-1} & a_{jj}\end{pmatrix}$$

حيث:

$$a_{ij}=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi_j'\varphi_i'dx$$

ومتجه الحمولة يعطى ب $B=\begin{pmatrix}b_{j-1}\\ b_j\end{pmatrix}$ حيث:

$$b_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} -a\varphi_j dx$$

فيكون لدينا:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = (a_{11}) = (4)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = (4)$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = (b_1) = \left(-\frac{a}{8}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} \\ -\frac{a}{8} \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} \\ -\frac{a}{8} \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \left(-\frac{a}{8}\right)$$

رابعا التجميع:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = -\frac{a}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

فتكون المعادلة المصفوفية من الشكل:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -\frac{a}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

والتي تعطي جملة المعادلات:

$$8y_1-4y_2=-\frac{a}{4}$$

$$-4y_1+8y_2-4y_3=-\frac{a}{4}$$

$$-4y_2+8y_3=-\frac{a}{4}$$

خامسا حل الجملة المصفوفية وإيجاد التقريب:

$$y_1=-\frac{3a}{32} \quad y_2=-\frac{a}{8} \quad y_3=-\frac{3a}{32}$$

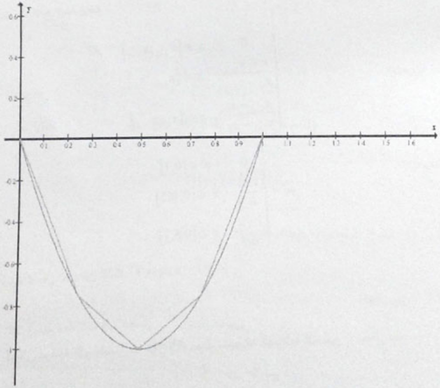
وبالتالي يكون الحل:

$$y=y_1\varphi_1+y_2\varphi_2+y_3\varphi_3$$

وبما أن الحل الفعلي للمسألة هو:

$$y=-\frac{a}{2}x\,(x-1)$$

فإننا نحصل على الشكل التالي (هذا الرسم من أجل a=8)



مثال:

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y''+y'=x^2 \quad 0<x<1$$
$$y(0)=y(1)=0$$

باستخدام توابع القبعة كتوابع قاعدة وباستخدام ثلاث عقد ثم باستخدام خمس عقد.

الحل:

نلاحظ أن:

$$p(x)=1 \quad q(x)=1 \quad r(x)=0 \quad f(x)=-x^2$$
$$0=x_0<x_1=0.5<x_2=1$$

نقسم المجال المعطى إلى عنصرين:

$$I_1=[x_0,x_1]=[0,0.5]$$
$$I_2=[x_1,x_2]=[0.5,1]$$

إن طول كل عنصر هو h=0.5.

ثانيا نختار توابع القاعدة (توابع القبعة)

ولدينا هنا تابع قبعة وحيد

$$\varphi_i=\begin{cases} 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}] \\ \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x\in[x_i,x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_1=\begin{cases} 0 & x\notin[0,1] \\ \dfrac{x}{0.5} & x\in[0,0.5] \\ \dfrac{1-x}{0.5} & x\in[0.5,1] \end{cases}$$

ونبحث عن حل من الشكل $y(x)=y_1\varphi_1(x)$.

ثالثا إيجاد معادلات كل عنصر

تعطى معادلة كل عنصر ب AY=B حيث مصفوفة الصلابة للعنصر j تعطى ب:

$$A^j=\begin{pmatrix} a_{j-1j-1} & a_{j-1j} \\ a_{jj-1} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

حيث:

$$a_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_i' \varphi_j' dx$$

ومتجه الحمولة يعطى ب $B = \begin{pmatrix} b_{j-1} \\ b_j \end{pmatrix}$ حيث:

$$b_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} -x^2 \varphi_j dx$$

فيكون لدينا:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = (a_{11}) = (2)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}) = (2)$$

$$b_1 = \int_{x_0}^{x_1} -x^2 \varphi_i dx = \int_0^{0.5} -x^2 \frac{x}{0.5} dx = -\frac{1}{16}$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = (b_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (b_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

رابعا التجميع:

$$A = \left(a_{11}^1 + a_{11}^2\right) = (4)$$

$$B = \left(b_1^1 + b_1^2\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-1)$$

فتكون المعادلة المصفوفية:

$$(4)(y_1) = (-1)$$

خامسا حل الجملة المصفوفية وإيجاد التقريب

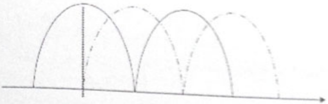
$$y_1 = -\frac{1}{4}$$

وبالتالي يكون الحل

$$y = -\frac{1}{4}\varphi_1$$

الآن سنقوم بزيادة الدقة برفع درجة حدوديات القاعدة.

سنستخدم حدوديات تربيعية على كل عنصر نسميها الفقاعات كما في الشكل:



التي تعطى بالشكل:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases} 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}] \\ (x-x_{i-1})\left(x-x_i+\dfrac{1}{x_i-x_{i-1}}\right) & x\in[x_{i-1},x_i] \\ (x-x_{i+1})\left(x-x_i+\dfrac{1}{x_{i+1}-x_i}\right) & x\in[x_i,x_{i+1}] \end{cases}$$

ونلاحظ أن هذه الحدوديات محلية وتحقق الخواص التي درسناها في الحدوديات الخطية:

وفي هذه الحالة تحافظ مصفوفة الصلابة على شكلها:

$$A=\begin{pmatrix} * & * & 0 & & & & \\ * & * & * & \cdots & & 0 & \\ 0 & * & * & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & * & * & 0 \\ & 0 & & \cdots & * & * & * \\ & & & & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

وتحسب عناصرها من العلاقات السابقة نفسها وكذلك بالنسبة لمصفوفات العناصر مع الانتباه إلى أن التكاملات تزداد صعوبة.

مثال:

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y''-y=-x \quad 0\le x\le 1$$
$$y(0)=y(1)=0$$

وذلك باستخدام العناصر المنتهية وتواع قاعدة تربيعية.

الحل:

أولا باستخدام العقد: $p(x)=1 \quad q(x)=0 \quad r(x)=1 \quad f(x)=x$

$$0=x_0<x_1=0.2<x_2=0.4<x_3=0.6<x_4=0.8<x_5=1$$

نقسم المجال المعطى إلى 5 عناصر:

$$\begin{aligned}
I_1&=[x_0,x_1]=[0,0.2]\\
I_2&=[x_1,x_2]=[0.2,0.4]\\
I_3&=[x_2,x_3]=[0.4,0.6]\\
I_4&=[x_3,x_4]=[0.6,0.8]\\
I_5&=[x_4,x_5]=[0.8,1]
\end{aligned}$$

إن طول كل عنصر هو h=0.2

ثانيا نختار توابع القاعدة (توابع الفقاعة)

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\\ (x-x_{i-1})\left(x-x_i+\dfrac{1}{x_i-x_{i-1}}\right) & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (x-x_{i+1})\left(x-x_i+\dfrac{1}{x_{i+1}-x_i}\right) & x\in[x_i,x_{i+1}]\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}0 & x\notin[0,0.4]\\ (x)(x-4.8) & x\in[0,0.2]\\ (x-0.4)(x-4.8) & x\in[0.2,0.4]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x\notin[0,0.4]\\ x^2-\dfrac{24}{5}x & x\in[0,0.2]\\ x^2-\dfrac{26}{5}x+\dfrac{48}{25} & x\in[0.2,0.4]\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}0 & x\notin[0.2,0.6]\\ (x-0.2)(x-4.6) & x\in[0.2,0.4]\\ (x-0.6)(x-4.6) & x\in[0.4,0.6]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x\notin[0.2,0.6]\\ x^2-\dfrac{24}{5}x+\dfrac{23}{25} & x\in[0.2,0.4]\\ x^2-\dfrac{26}{5}x+\dfrac{48}{25} & x\in[0.4,0.6]\end{cases}$$

$$\varphi_3(x)=\begin{cases}0 & x\notin[0.4,0.8]\\(x-0.4)(x-4.4) & x\in[0.4,0.6]\\(x-0.8)(x-4.4) & x\in[0.6,0.8]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x\notin[0.4,0.8]\\x^2-\frac{24}{5}x+\frac{44}{25} & x\in[0.4,0.6]\\x^2-\frac{26}{5}x+\frac{88}{25} & x\in[0.6,0.8]\end{cases}$$

$$\varphi_4(x)=\begin{cases}0 & x\notin[0.6,1]\\(x-0.6)(x-4.2) & x\in[0.6,0.8]\\(x-1)(x-4.2) & x\in[0.8,1]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x\notin[0.6,1]\\x^2-\frac{24}{5}x+\frac{63}{25} & x\in[0.6,0.8]\\x^2-\frac{26}{5}x+\frac{21}{25} & x\in[0.8,1]\end{cases}$$

ونبحث عن حل من الشكل:

$$y(x)=y_1\varphi_1(x)+y_2\varphi_2(x)+y_3\varphi_3(x)+y_4\varphi_4(x)$$

ثالثا إيجاد معادلات كل عنصر

تعطى معادلة كل عنصر ب AY=B حيث مصفوفة الصلابة للعنصر j تعطى ب

$$A^j=\begin{pmatrix}a_{j-1j-1} & a_{j-1j}\\a_{jj-1} & a_{jj}\end{pmatrix}$$

حيث:

$$a_{ij}=\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi_j'\varphi_i'dx+\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi_j\varphi_i dx$$

ومتجه الحمولة يعطى ب $B=\begin{pmatrix}b_{j-1}\\b_j\end{pmatrix}$

حيث:

$$b_j=\int_{x_{j-1}}^{x_j}x\varphi_j dx$$

فيكون لدينا:

$$A^1=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01}\\a_{10} & a_{11}\end{pmatrix}=(a_{11})=\left(-\frac{22}{5}\right)=(4.4)$$

$$A^2=\begin{pmatrix}8.953877 & 3.775051\\ 3.775051 & 3.5780197\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}3.576597 & -1.638176\\ -1.638176 & 2.930197\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}2.928171 & 2.569397\\ 2.569397 & 0.031744\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}a_{44} & a_{45}\\ a_{54} & a_{55}\end{pmatrix}=(a_{44})=(3.310485)$$

$$B^1=\begin{pmatrix}b_0\\ b_1\end{pmatrix}=(b_1)=(-0.0127)$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0.024133\\ -0.1252\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}0.07\\ -0.1572\end{pmatrix}$$

$$B^4=\begin{pmatrix}0.049733\\ -0.0508\end{pmatrix}$$

$$B^5=\begin{pmatrix}b_4\\ b_5\end{pmatrix}=(b_4)=(0.057733)$$

رابعا التجميع:

$$A=\begin{pmatrix}13.353877 & 3.775051 & 0 & 0\\ 3.775051 & 7.154688 & -1.638176 & 0\\ 0 & -1.638176 & 5.858368 & 2.569397\\ 0 & 0 & 2.569397 & 3.342229\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0.011433\\ -0.0552\\ -0.107467\\ 0.006933\end{pmatrix}$$

خامسا الجملة المصفوفية:

AY=B

$$\begin{pmatrix}13.353877 & 3.775051 & 0 & 0\\ 3.775051 & 7.154688 & -1.638176 & 0\\ 0 & -1.638176 & 5.858368 & 2.569397\\ 0 & 0 & 2.569397 & 3.342229\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.011433\\ -0.0552\\ -0.107467\\ 0.006933\end{pmatrix}$$

والتي تعطي جملة المعادلات:

$$13.353877y_1 + 3.775051y_2 = 0.011433$$
$$3.775051y_1 + 7.154688y_2 - 1.638176y_3 = -0.0552$$
$$-1.638176y_2 + 5.858368y_3 + 2.569397y_4 = -0.107467$$
$$2.569397y_3 + 3.342229y_4 = 0.006933$$

مادنما حل الجملة المصفوفية:

بحل جملة المعادلات السابقة نحصل على

$$y_1 = 0.00641 \quad y_2 = -0.019464 \quad y_3 = -0.037336 \quad y_4 = 0.030777$$

ومنه يكون الحل:

$$y(x) = y_1\varphi_1(x) + y_2\varphi_2(x) + y_3\varphi_3(x) + y_4\varphi_4(x)$$

ملاحظة:

يمكن استخدام توابع قبعة وتوابع فقاعة معا، ولكن ننتبه إلى التغيرات على مصفوفة الصلابة ومتجه الحمولة في هذه الحالة.

ملاحظة (2):

إن خطأ القطع في نشر تايلور في حالة الحدوديات الخطية يكون من المرتبة الثانية أما في حالة الحدوديات التربيعية فإنه يكون من المرتبة الثالثة فلو استخدمنا حدوديات تكعيبية يكون الخطأ من المرتبة الرابعة وهذا ما يجعل زيادة درجة الحدودية تزيد من دقة التقريب.

انتهى الفصل