مثال

ليكن لدينا تابع الهدف التالي : $Z = 5x_1 + 2x_2 - 5 \longrightarrow max$

حيث الشروط :

$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 \geq -4$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

المطلوب : تنظيم هذا التابع في جدول واجاد قيم x_1, x_2 التي تجعل تابع الهدف أكبر ما يمكن .

الحل :

الخطوة الاولى لتحول النموذج الخطي الى الشكل القياسي :

- المتراجحة الاولى : نقوم باضافة متحول $y_1 \geq 0$ الى الطرف الأيسر على الشكل التالي :

$$x_1 - x_2 + y_1 = 4$$

- المتراجحة الثانية : نقوم بطرح متحول $y_2 \geq 0$ الى الطرف الايسر على الشكل التالي :

$$3x_1 - 2x_2 - y_1 = 1$$

- المتراجحة الثالثة : نقوم بضرب طرفي المتراجحة بـ -1 ثم إضافة متحول $y_3 \geq 0$ على الشكل التالي :

$$-x_1 - x_2 + y_3 = 4$$

- المتراجحة الرابعة : نقوم باضافة متحول $y_4 \geq 0$ على الشكل التالي :

$$x_2 + y_4 = 5$$

- المتراجحة الخامسة : ايضاً نضيف متحول $y_5 \geq 0$ على الشكل التالي :

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + y_5 = 6$$

وبالتالي يصبح النموذج : أوجد :

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 5 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 \longrightarrow Max$$

حيث الشروط :

$$x_1 - x_2 + y_1 = 4$$
$$3x_1 - 2x_2 - y_2 = 1$$
$$-x_1 - x_2 + y_3 = 4$$
$$x_2 + y_4 = 5$$
$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + y_5 = 6$$
$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad y_i \geq 0 \; ; \; i = \overline{1,5}$$

— نلاحظ انه لدينا 7 متحولات و5 معادلات اي يوجد لدينا 5 متحولات قاعدية.
والآن لننظم الجدول التالي :

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	1	-1	1	0	0	0	0	4
y_2	(3)	-2	0	-1	0	0	0	1
y_3	-1	-1	0	0	1	0	0	4
y_4	0	1	0	0	0	1	0	5
y_5	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	6
تابع الهدف	5	2	0	0	0	0	0	$Z+5$

— الآن لنبحث عن قاعدة و هنا نرى فيما اذا كان يوجد قاعدة جاهزة أم لا .
نلاحظ انه لا يوجد قاعدة جاهزة وذلك لأن : من الجدول السابقة نلاحظ ان ليست جميع امثال y_i مساوية للواحد (امثال y_4 تساوي 1- ، وهنا لا يمكننا ضرب المعادلة بـ 1- لأن هذه العملية ستجعل الطرف الأيمن سالب ، وهذا مرفوض .
اذا الوضعية السابقة لا تصلح لأن تكون قاعدة اولى .
• اذا البحث عن قاعدة اما باتباع طريقة غاوس أو الطريقة المتبعة بـ Simplex المباشرة .

شرح :

اذا اعطينا نموذج خطي و طلب منا حله بطريقة Simplex :

- اولاً نقوم بمعاينة النموذج (تحويله الى شكل قياسي) . وهنا سنتبع طريقة max اي نريد أن نجعل التابع تابع max .
- ثم نقوم بتجميل القيود (المتراجحات) الى معادلات وذلك باضافة او طرح متحولات موهية وذلك بعد التأكد من ان جميع العناصر الموجودة في الطرف الايمن من القيود أكبر او تساوي الصفر .
- بعدها نكتب النموذج الجديد (شكل قياسي) .
- ننظم المعلومات في جدول .
- ثم ننظر اذا كان لدينا قاعدة ابتدائية اذا كان لدينا قاعدة ابتدائية نبدأ بالبحث عن حل مثالي .

ALMADID.net

اما اذا لم يكن لدينا قاعدة نبدأ بالبحث عن قاعدة ثم نبحث عن حل امثل في مثالنا هذا القاعدة غير جاهزة .

لدينا اربع متحولات يمكننا ان نعتبرها متحولات قاعدية يلزمنا المتحول الداخل .

اذا بقي ان نرى اي متحول ندخله الى التابع : كما يلي :

ننظر لسطر تابع الهدف ونختار اكبر عدد وهي 5 هذا يعني ان x_1 يصلح ان يكون قاعدي . لكن في اي سطر سندخله لذلك نقوم بتقسيم عناصر b_i على عناصر العمود x_1 ونختار اصغرها :

$$\text{Min}\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_3}{a_{31}}, \frac{b_4}{a_{41}}, \frac{b_5}{a_{51}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{4}{1}, \frac{1}{3}, \frac{5}{1}\right\} = \frac{1}{3}$$

$a_{41} = 0$ لا نقسم على صفر . سالب لذلك لا نقسم .

لذلك نجد ان عناصر الارتكاز مطابقاً لـ 3 ثم نقسم سطره على 3 ونجعل جميع عناصر عموده مساوية للصفر ماعداه يكون واحد . ونحسب بقية عناصر الجدول من القوانين التالية :

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{tj} \cdot \frac{a_{is}}{a_{ts}} \quad , \quad b'_i = b_i - b_t \cdot \frac{a_{is}}{a_{ts}}$$

$$P'_j = P_j - P_s \cdot \frac{a_{tj}}{a_{ts}}$$

حيث $a_{ts} = 3$ حيث $t=2$, $s=1$ و هذا يتغيران لمسح بقية عناصر الجدول فنعمل على الجدول التالي :

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{11}{3}$
x_1	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
y_3	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{13}{3}$
y_4	0	(1)	0	0	0	1	0	5
y_5	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{17}{3}$
تابع الهدف	0	$\frac{16}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	0	0	$Z + \frac{10}{3}$

فيما يلي سأقوم بوضع بعض عناصر الجدول التي قمنا بحسابها حيث لدينا (s = 1 , t = 2)

$a'_{12} = a_{12} - a_{22} \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}}$; $i = 1, j = 2$

$= -1 - (-2)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-3+2}{3} = -\frac{1}{3}$

$a'_{34} = a_{34} - a_{24} \cdot \left(\frac{a_{31}}{a_{21}}\right)$; $i = 3, j = 4$

$= 0 - (-1)\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

- بنفس الاسلوب يتم حساب بقية العناصر a_{ij} .

$b'_1 = b_1 - b_2 \cdot \frac{(a_{11})}{(a_{21})} = 4 - 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

$b'_4 = b_4 - b_2 \cdot \frac{(a_{41})}{(a_{21})} = 5 - 1 \cdot \frac{(5)}{(3)} = 5$

- بنفس الاسلوب ايضاً يتم حساب بقية عمود الثوابت

- حساب امثال تابع الهدف كما يلي :

$P_2 = P_2 - P_1 \cdot \frac{a_{22}}{a_{21}} = 2 - 5 \cdot \frac{(-2)}{3} = \frac{6+10}{3} = \frac{16}{3}$

$P'_3 = P_3 - P_1 \cdot \frac{a_{23}}{a_{21}} = 0 - 5 \cdot \frac{(0)}{3} = 0$

$P'_4 = P_4 - P_1 \cdot \frac{a_{24}}{a_{21}} = 0 - 5 \cdot \frac{(-1)}{3} = \frac{5}{3}$

بالنظر الى سطر تابع الهدف نلاحظ ان امثال تابع الهدف موجبة اذاً هذا يعني انه لم نصل بعد الى الحل المثالي بعد .

لذلك نختار اكبر قيمة في سطر تابع الهدف وهي $\frac{16}{3}$ اذا اصبح عمود المتغير x_2 هو عمود الارتكاز في خطوة حسبية ، من اجل تعيين عنصر الارتكاز نقوم بتقسيم عمود b_i على القيم الموجبة في عمود الارتكاز واختيار اصغر قيمة ناتجة عن التقسيم :

$$\text{Min}\left\{\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \frac{b_3}{a_{32}}, \frac{b_4}{a_{42}}, \frac{b_5}{a_{52}}\right\} = \text{Min}\left\{\frac{5}{1}, \frac{\frac{17}{3}}{\frac{1}{6}}\right\} = 5$$

هنا لا نقسم لانه يوجد عناصر سالبة .

- بالتالي عنصر الارتكاز الجديد هو 1 ، نقوم بتقسيم عناصر سطره على نفسه ونجعل عموده جميعه اصفار ما عداه ونحسب بقية عناصر الجدول باستخدام القوانين السابقة

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{11}{3}$
y_3	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{38}{3}$
x_2	0	1	0	0	0	1	0	5
y_5	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{29}{6}$
تابع الهدف	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{16}{3}$	0	$Z - \frac{170}{3}$

ايضاً نلاحظ انه نتج معنا اعداد موجبة في سطر تابع الهدف وسيكرر نفس العمليات السابقة ....

نلاحظ أن $\frac{5}{3}$ هو أكبر عنصر في سطر تابع الهدف - ما الآن لنقسم b_i على عمود $\frac{2}{3}$ لنختار عنصر الارتكاز . نجد أن عنصر الارتكاز هو $\frac{1}{3}$ (محدد بدائرة) نقسم سطره على $\frac{1}{3}$ ونجعل جميع عناصر عمود ارتكاز ما عداه . وحسب بقية عناصر الجدول باستخدام العلاقات السابقة .

المتحولات / القاعدة	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
y_1	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{51}{6}$
y_3	0	0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{105}{6}$
x_2	0	1	0	0	0	1	0	5
y_2	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	3	$\frac{29}{2}$
تابع الهدف	0	0	0	0	0	$-\frac{27}{6}$	-5	$Z - \frac{285}{6}$

وهنا نلاحظ أن سطر تابع الهدف جميع العناصر فيه سالبة اذاً الحل الأمثل هو :

$(y_1, x_1, y_3, x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{51}{6}, \frac{105}{6}, 5, \frac{29}{2})$

$y_4 = 0$, $y_5 = 0$

(50) Finished Lecture ...

Eman alhalbouni

ALGAVID.net

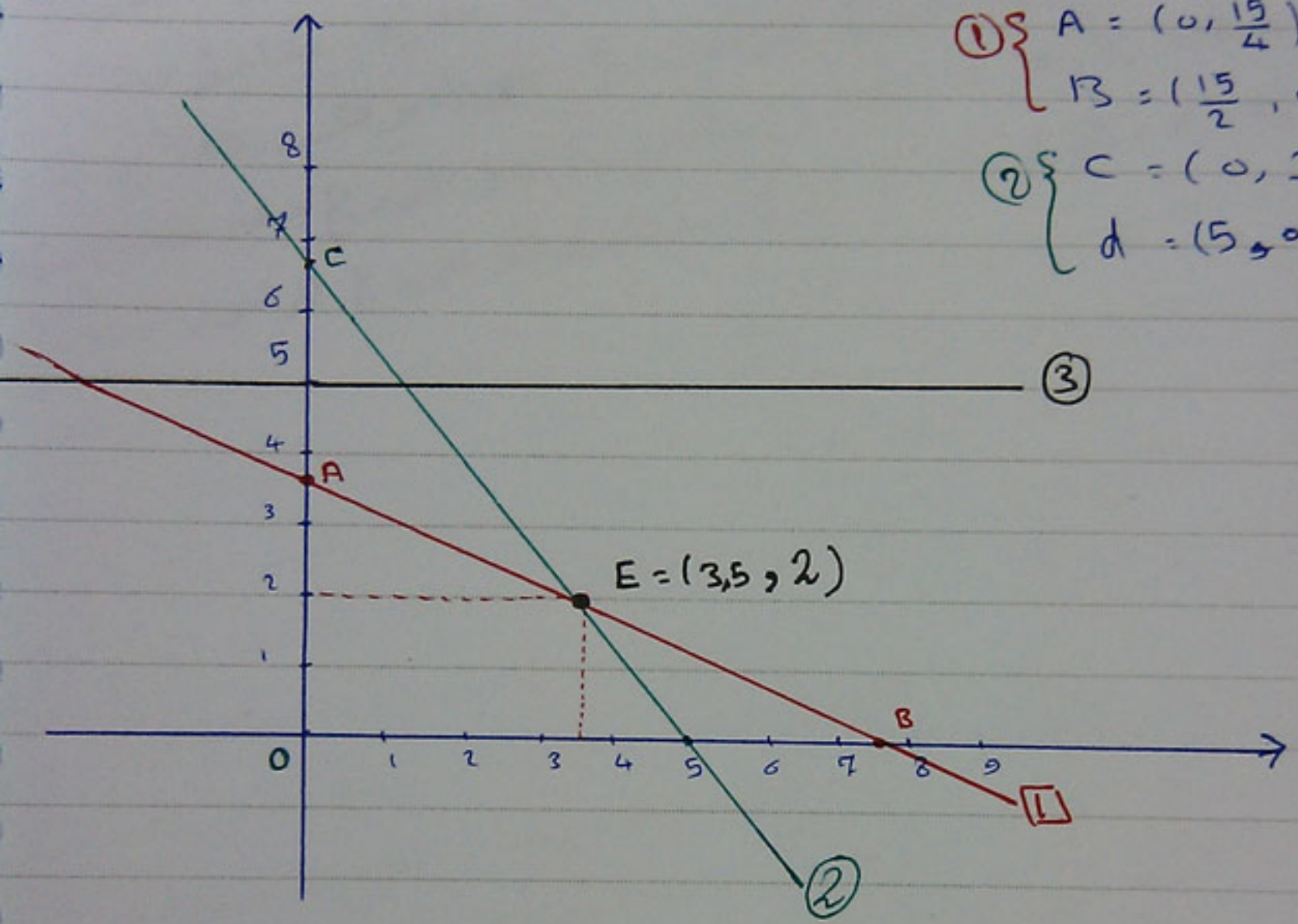
Subject : .....

تصحيح خطأ وارد في المحاضرة السابقة :

[1] في الصفحة [33] الرسم البياني لمعادلات المستقيم

① $\begin{cases} A = (0, \frac{15}{4}) \\ B = (\frac{15}{2}, 0) \end{cases}$

② $\begin{cases} C = (0, \frac{20}{3}) \\ d = (5, 0) \end{cases}$



[2] في الصفحة [35] من المحاضرة : تابع الحل الجديد :

$max\ z' = 5x_1 + 2x_2$ (-5) الحد الثابت .

• • • • • •