نظرية الفئات

المحاضرة الثامنة

٢٠١٥/٤/٧

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ فئتين .

لنشكل فئة جديدة $\mathcal{C} = Funct(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ المؤلفة من :

١- صف الأشياء المؤلف من جميع الدوال المباشرة من $\mathcal{C}_1$ إلى $\mathcal{C}_2$.

٢- صف المورفيزمات المؤلف من جميع المورفيزمات العالية من F إلى G

حيث $F, G \in ob(\mathcal{C})$ ،

عندئذٍ $\mathcal{C}$ تشكل فئة تسمى فئة الدوال من $\mathcal{C}_1$ إلى $\mathcal{C}_2$.

ملاحظة: إن أشياء الفئة $\mathcal{C}$ مجموعات (إثبات ذلك غير مطلوب)

ملاحظة هامة:

بالعودة إلى المحاضرة الأولى نجد أنه إذا كان لدينا صف أشياء وصف مورفيزمات فيجب أن تحققا 5 شروط حتى يشكلا فئة .

إن برهان 1 صعب ومعقد جداً لذا سنعتبره محقق دوماً .

أما الشرط 5 فهو بديهي ولا داعي لذكره .

ومنه يبقى علينا برهان 2 و 3 و 4 ، أي علينا القيام بما يلي :

- تعريف عملية ضرب المورفيزمات .
- إثبات أن هذه العملية تجميعية .
- اثبات وجود المورفيزم المطابق .

البرهان :

* ليكن : $f: F \longrightarrow G$, $g: G \longrightarrow H$

مورفيزمات دالية حيث : $F, G, H \in ob(\mathcal{F})$

إذاً $F, G, H : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ دوال مباشرة .

لنعرّف التطبيق : ٣ $: \mathcal{F}(F,G) \times \mathcal{F}(G,H) \longrightarrow \mathcal{F}(F,H)$

٣ $(f,g) = g.f$

وجدنا سابقاً أن $g.f : F \longrightarrow H$ مورفيزم دالي .

* $\forall f, g, h \in Mor(\mathcal{F})$, $\forall A \in ob(\mathcal{F}_1)$.

حيث تركيب f, g, h معرف فإن :

$$((g.f).h)(A) = (g.f)(A) . h(A)$$

$$= (g(A) . f(A)) . h(A)$$

مورفيزمات للفئة $\mathcal{F}_2$ فـ ضربها تجميعي .

$$= g(A) . (f(A) . h(A))$$

$$= g(A) . ((f.h)(A))$$

$$= (g.(f.h))(A)$$

ومنه ضرب المورفيزمات الدالية تجميعي .

* لنبرهن على وجود مورفيزم دالي مطابق :

$$\forall F : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \in ob(\mathcal{F})$$

لنعرف المورفيزم الدالي :

$$I_F : F \longrightarrow F$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{F}_1) : I_F(A) : F(A) \longrightarrow F(A) = I_{F(A)}$$

هو مورفيزم للفئة $\mathcal{F}_2$.

ليكن $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$ ، ولنأخذ المخطط :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "I_F(A)"] \arrow[d, "F(u)"'] & F(A) \arrow[d, "F(u)"] \\
F(B) \arrow[r, "I_F(B)"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

$$F(u) \, . \, I_F(A) = F(u) \, . \, I_{F(A)} = F(u)$$
$$I_F(B) \, . \, F(u) = I_{F(B)} \, . \, F(u) = F(u)$$

وهذا يبين أن المخطط الأخير تبديلي .

وبالتالي $I_F : F \longrightarrow F$ مورفيزم دالي .

أي أصبح لدينا : $\forall F \in ob(\mathcal{C}) \quad : I_F \in Mor(\mathcal{C})$

- ولنثبت أنه مطابق :

$$\forall\, g : G \longrightarrow F \;,\; h : F \longrightarrow H \in Mor(\mathcal{C})$$

لنبرهن أن : $I_F . g = g \quad , \quad h . I_F = h$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "I_F . g"] & \\
F \arrow[r, "I_F"] \arrow[dr, "h . I_F"'] & F \arrow[d, "h"] \\
& H
\end{tikzcd}$$

$\forall A \in ob(\mathcal{C}_1) :$

$$(I_F . g)(A) = I_F(A) \, . \, g(A)$$
$$= I_{F(A)} . g(A) = g(A)$$
$$\Longrightarrow I_F . g = g$$

$$\forall A \in ob(\mathcal{C}_1) : (h . I_F)(A) = h(A) \, . \, I_F(A)$$
$$= h(A) \, . \, I_{F(A)} = h(A)$$
$$\Longrightarrow h . I_F = h$$

مما سبق نجد أن I_F مورفيزم مطابق في الفئة $\mathcal{C}$

مبرهنة:
ليكن $\mathcal{C}_1$ فئة ما. عندئذٍ يوجد دالي غير مباشر:

$$h : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C} = Funct(\mathcal{C}_1, Sets)$$

معرف بالشكل:

$$\forall X \in ob(\mathcal{C}_1) \ : \ h(X) = h_X$$

(راجع المحاضرة الثالثة حول الدالي h_X)

البرهان: لنعرف h من خلال تطبيقي الأشياء والمورفيزمات الآتيين:

* تطبيق الأشياء: لنأخذ: $h : ob(\mathcal{C}_1) \longrightarrow ob(\mathcal{C})$

المعرف بالشكل: $\forall X \in ob(\mathcal{C}_1) \ : \ h(X) = h_X \in ob(\mathcal{C})$

ولنثبت أنه تطبيق:

ليكن $X, X' \in ob(\mathcal{C}_1)$ بحيث $X = X'$

$$\forall A \in ob(\mathcal{C}_1) : h_X(A) = \mathcal{C}_1(X, A) = \mathcal{C}_1(X', A) = h_{X'}(A)$$

$$\Longrightarrow h_X = h_{X'} \Longrightarrow h(X) = h(X')$$

ومنه فتطبيق الأشياء موجود.

* تطبيق المورفيزمات: لنأخذ: $h : Mor(\mathcal{C}_1) \longrightarrow Mor(\mathcal{C})$

الذي يربط كل مورفيزم $w : A \longrightarrow B$ للفئة $\mathcal{C}_1$ بالمورفيزم $h(w)$

الذي سنعرفه كما يلي:

وجدنا سابقاً أنه من أجل كل مورفيزم $w : A \longrightarrow B$ يوجد مورفيزم دالي:

$$h_w : h_B \longrightarrow h_A$$ (راجع المحاضرة الرابعة)

إذاً لنضع $h(w) = h_w$

ولنثبت أن تطبيق المورفيزمات موجود:

ليكن $w_1 = w : A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}_1$.

عندئذٍ توجد المورفيزمات الدالية:

$$h_w, h_{w_1} : h_B \longrightarrow h_A$$

$$\forall y \in ob(\mathcal{Y}_1) \ : \ h_w(y) : h_B(y) \longrightarrow h_A(y)$$
$$h_w(y) : \mathcal{Y}_1(B,y) \longrightarrow \mathcal{Y}_1(A,y)$$

$$\forall u \in \mathcal{Y}_1(B,y) : h_w(y)(u) = u \cdot w = u \cdot w_1 = h_{w_1}(y)(u)$$
$$\Longrightarrow h_w(y) = h_{w_1}(y)$$
$$\Longrightarrow h_w = h_{w_1} \Longrightarrow h(w) = h(w_1)$$

ومنه تطبيق المورفيزمات موجود

* برهان الشرط الأول:

ليكن $A \in ob(\mathcal{Y}_1)$ ولنأخذ $I_A : A \longrightarrow A$ وصورته:

$$h(I_A) = h_{I_A} : h_A \longrightarrow h_A$$

$$\forall y \in ob(\mathcal{Y}_1) \ : h_{I_A}(y) : h_A(y) \longrightarrow h_A(y)$$
$$h_{I_A}(y) : \mathcal{Y}(A,y) \longrightarrow \mathcal{Y}(A,y)$$

$$\forall u \in \mathcal{Y}(A,y) : h_{I_A}(y)(u) = u \cdot I_A = u$$

أي صورة العنصر وفق $h_{I_A}(y)$ هي العنصر نفسه، ومنه فهو المطابق:

$$h_{I_A}(y) = I_{\mathcal{Y}(A,y)} = I_{h_A(y)} \underset{\downarrow}{=} I_{h_A}(y)$$

حسب تعريف المورفيزم التالي المطابق

$$\Longrightarrow h_{I_A} = I_{h_A}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "u \cdot I_A"'] & A \arrow[d, "u"] \\ & y \end{tikzcd}$$

فالشرط الأول محقق

* برهان الشرط الثاني :

ليكن : $u : A \longrightarrow B \quad , v : B \longrightarrow D$

مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}_1$ فيكون :

$$v.u : A \longrightarrow D \in \mathcal{C}_1(A,D)$$

إنّ : $h(v.u) = h_{v.u} : h_D \longrightarrow h_A$

$$\forall y \in ob(\mathcal{C}_1) : h_{v.u}(y) : h_D(y) \longrightarrow h_A(y)$$
$$h_{v.u}(y) : \mathcal{C}_1(D,y) \longrightarrow \mathcal{C}_1(A,y)$$

$\forall \lambda \in \mathcal{C}_1(D,y)$:

$$h_{v.u}(y)(\lambda) = \lambda.(v.u) = (\lambda.v).u = h_u(y)(\lambda.v)$$
$$= h_u(y)\big(h_v(y)(\lambda)\big) = \big(h_u(y).h_v(y)\big)(\lambda)$$
$$\Longrightarrow h_{v.u}(y) = h_u(y).h_v(y)$$

وحسب تعريف جداء المورفيزمات الدالية يكون :

$$h_{v.u}(y) = (h_u.h_v)(y) \Longrightarrow h_{v.u} = h_u.h_v = h(u).h(v)$$

$$\Longrightarrow h(v.u) = h(u).h(v)$$

فالشرط الثاني محقق والدالي h موجود وغير مباشر.

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{C}_1$ فئة ما. عندئذٍ يوجد دالي مباشر :

$$\hat{h} : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C} = Funct(\mathcal{C}_1^{\circ}, Sets)$$

معرف بالشكل :

$$\forall X \in ob(\mathcal{C}_1) : \hat{h}(X) = \hat{h}_X$$

انتهت المحاضرة الثامنة