المحاضرة التاسعة..

الإثنين 13/4/2015 ..

- الداليات الخطية -

الدالي هو مؤثر يقع مداه في المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ أو في المستوي العقدي $\mathbb{C}$.
سنرمز للداليات بأحرف لاتينية صغيرة مثل f و g و h و ... ولساحة الدالي f بـ $D(f)$ ولمداه بـ $R(f)$ ولقيمة f في نقطة x من $D(f)$ بـ $f(x)$.

وبما أنَّ الداليات هي مؤثرات، فإنَّ كل التعاريف السابقة المتعلقة بالمؤثرات تسري على الداليات.

تعريف (الدالي الخطي):

هو مؤثر خطي، تقع ساحته في فضاء متجهي X ومداه في الحقل العددي K للفضاء X.

$$f : D(f) \longrightarrow K \qquad ; \; K = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$$

تعريف (الدالي الخطي المحدود):

هو مؤثر خطي محدود، أي أنه يوجد عدد حقيقي c بحيث أنه أيًا كان x من $D(f)$ فإنَّ:

$$|f(x)| \leq c\,\|x\|$$

وأصغر عدد c يحقق هذا التراجح ندعوه $\|f\|$

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

أو نكتب :

$$\|f\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in D(f)}} |f(x)|$$

أي أنّ :

$$|f(x)| \leqslant \|f\| . \|x\|$$

وهذا ما يبين أنّ f محدود .

مبرهنة (الاستمرار والمحدودية) :
الشرط اللازم والكافي كي يكون الدالي الخطي f الذي ساحته $D(f)$ واقعة في فضاء منظم مستمراً هو أن يكون f محدوداً .

أمثلة :

1. النظيم :

النظيم $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ على فضاء منظم $(X, \|.\|)$ هو دالي ولكنه ليس خطي :

حيث

$$\|x+y\| \neq \|x\| + \|y\|$$

وإنما

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

2. الجداء العددي :

يعين الضرب العددي عندما نثبت أحد المضروبين دالي خطي

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$
$$f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = ax$$

حيث $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ عنصر مثبت من $\mathbb{R}^3$.
$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ نقطة ما من هذا الفضاء.

للبرهان على أنه خطي علينا أن نثبت:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

$$f(\alpha x) = \alpha \alpha_1 \xi_1 + \alpha \alpha_2 \xi_2 + \alpha \alpha_3 \xi_3$$
$$= \alpha (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)$$
$$= \alpha f(x)$$

وإن f محدود:

$$|f(x)| = \overset{\text{جداء داخلي}}{|x \cdot a|} \leq \|a\| \cdot \|x\|$$
حسب كوشي شفارتز

نقسم على $\|x\|$:

$$\|f\| \leq \|a\| \qquad (1)$$

وذلك إذا أخذنا الـ sup لكل العناصر x التي نظيم كل منها يساوي 1.
إيجاد نظيم f:
نختار نقطة بحيث يكون $x = a$ و a شعاع في $\mathbb{R}^3$.

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

$$f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 \Rightarrow |f(a)| = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \|a\|^2$$

$$\Rightarrow \|f\| \geqslant \|a\| \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أنّ:

$$\|f\| = \|a\|$$

و f مستمر لأنه محدود.

3- التكامل المحدد:

$$f : C[a,b] \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$$

x دالة مستمرة من $C[a,b]$

(بما أنّ $x(t)$ مستمرة فتكامل ريمان المحدد موجود حكماً).

إنّ f خطي و سنثبت الآن أنّ f محدود وأنّ نظيمه هو $\|f\| = b-a$.

إنّ: $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |x(t)\,dt|$$

$$\leqslant \max |x(t)| \int_a^b |dt|$$

$$\leqslant \|x\|\,|b-a|$$

نأخذ $c = |b-a|$

نقسم على $\|x\|$ ونأخذ $\sup$:

$$\Rightarrow \|f(x)\| \leq b-a \qquad (1)$$

نأخذ $x = x_0 = 1$ الذي نظيمه $\|x_0\| = 1$ $\qquad \|1\| = \max |1(t)| = 1$

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b-a \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن: $\|f\| = b-a$

4- الفضاء $C[a,b]$:

$$f: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_1(x)(t) = x(t_0)$$

المتتالية x صورتها $f(x)$ أي f تأخذ t

صورة f عند دالة x هو x عند t_0 مثبتة

t_0 نقطة مثبتة في $[a,b]$.

إن f_1 خطي:

$$f_1(x+y)(t) = (x+y)(t_0)$$
$$= x(t_0) + y(t_0)$$
$$= f_1(x)(t) + f_1(y)(t)$$

$$\Rightarrow f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y) \quad ; \forall t$$

كذلك فإن f_1 محدود ونظيمه $\|f_1\| = 1$:

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|$$

$$; |x(t_0)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = \|x\|$$

نقسم على $\|x\|$ ونجعل $\|x\| = 1$

$$\frac{|f_1(x)|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow \sup \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} \leq 1$$

$$\Rightarrow \|f_1\| \leq 1 \qquad (1)$$

وبحالة خاصة نأخذ $x = x_0 = 1$ $\Leftarrow$ $x_0(t_0) = 1$

$$\Rightarrow \|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1 \qquad (2)$$

من (1) و(2) نجد أنّ:

$$\|f_1\| = 1$$

5- الفضاء ℓ^2:

هو فضاء المتتاليات لهلبرت (هو فضاء منظم وتام وفضاء جداء داخلي)

نأخذ متتالية مثبتة في ℓ^2: $a = (a_i) \in \ell^2$

ولنعرف f بالشكل: $f : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i a_i$$

حيث إنّ $x = (\xi_i) \in \ell^2$

(إن المجموع السابق موجود إذا كانت المتسلسلة متقاربة)

حسب كوشي شوارتز $f(x) = |\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i a_i|$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}$$

$$= \underbrace{\|x\|}_{\text{عدد}} \cdot \underbrace{\|a\|}_{\text{عدد}}$$

فالمتسلسلة متقاربة بالإطلاق فهي متقاربة

وإنّ f محدود ونظيمه $\|f\| = \|a\|$
ونثبت ذلك بدراسة مشابهة لما سبق.

إنّ مجموعة كل الداليات الخطية المعرفة على فضاء متجهي X يمكن أن نحولها ذاتها إلى فضاء متجهي ونرمز له بـ X^* وندعوه الفضاء الثنوي الجبري
نزود هذا الفضاء بعمليتي الجمع والضرب فنحصل على فضاء متجهي.

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x)$$

لنسر خطوة أخرى إلى الأمام وذلك بأخذ الثنوي الجبري $(X^*)^*$ لـ X^*
الذي عناصره هي الداليات الخطية المعرفة على X^* وسنرمز له بـ X^{**} وندعوه
الفضاء الثنوي الجبري الثاني لـ X.
لنأخذ الجدول التالي:

الفضاء	العنصر العام	القيمة في نقطة	
X	x	—	ليس هناك معنى لـ x في نقطة
X^*	f	$f(x)$	f داليات خطية على X
X^{**}	g	$g(f)$	g داليات خطية على X^*

من الممكن الحصول على $g \in X^{**}$ وهو دالي خطي على X^* بأن نختار عنصر مثبت x من X ونكتب:

$$g(f) = g_x(f) = f(x)$$

(x عنصر مثبت من X و f متغير في X^*)

إنَّ g_x دالي خطي على X^*:

$$g_x(f_1+f_2) = g_x(f_1)+g_x(f_2)$$

حيث أنَّ:

$$g_x(f_1+f_2) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = g_x(f_1)+g_x(f_2)$$

الداليات الخطية على X^* هي مكونات الفضاء X^{**}..

كلما غيرت x نحصل على دالي خطي جديد على X^*..

انتهت المحاضرة