المحاضرة العاشرة..

الثلاثاء 2015/4/14 ..

وجدنا في المحاضرة السابقة أنّ g_x عنصر من X^{**} استناداً إلى تعريف X^{**}.
وبالتالي بما أنه يقابل كل عنصر x من X عنصر g_x من X^{**} فإنّه يحدد تطبيق هو:

$$C : X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto g_x$$

يدعى C التطبيق الخطي القانوني لـ X في X^{**}.
ساحة التطبيق C هي فضاء متجهي ولنثبت أنّ C خطي:

$$(C(\alpha x+\beta y))(f) \overset{?}{=} \alpha(C(x))(f)+\beta(C(y))(f)$$

$$(C(\alpha x+\beta y))(f) = g_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x+\beta y)$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \text{و } f \text{ خطي}$$

$$= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f)$$

$$= \alpha (Cx)(f) + \beta (Cy)(f).$$

يدعى C أيضاً الطمر القانوني لـ X في X^{**}.

الصفحات ١٤٠ـ١٤١ "قراءة"

الصفحات ١٤٤ ← ١٦٤ "تترك لما بعد"

فضاءات الجداء الداخلي .. فضاءات هلبرت ..

فضاء الجداء الداخلي X هو فضاء متجهي مزود بدالة الجداء الداخلي $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \longrightarrow K \qquad K=\mathbb{R} \text{ أو } \mathbb{C}$$

وهذه الدالة تحقق:

أياً كانت x, y, z من الفضاء المتجهي X وأياً كان العدد α فإن:

$$S_1: \langle x,x\rangle \geq 0$$

$$S_2: \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$$

$$S_3: \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$$

$$S_4: \langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$$

$$S_5: \langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

عندئذٍ ندعو $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ بفضاء الجداء الداخلي.

وكما هو معلوم بوصفنا أنّ:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

أي إنّ الجداء الداخلي على X يحدد نظيماً معرف بالمساواة السابقة

ومنه نستطيع القول إنّ كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم.

كذلك فإنّ الجداء الداخلي على X يحدد متريك كما يلي:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

لذا فإنّ فضاء الجداء الداخلي التام يكون فضاء منظم تام
أي أنّ فضاءات هلبرت هي فضاءات باناخ.

استناداً إلى S_3 فإنّه إذا كان X فضاءً متجهياً حقيقياً فإنّه يكون:
"التناظر" $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

يترتب على الشروط من S_1 وحتى S_5 الخواص التالية:

- $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$

وذلك حسب S_2 و S_5

- $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$

$\overline{z_1 . z_2} \overset{?}{=} \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

$\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2)$

$= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\bar{z}_1 . \bar{z}_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_1x_2 + y_2x_1)$

$\Rightarrow f_1 = f_2$

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y,x\rangle}$$
$$= \bar{\alpha}\,\overline{\langle y,x\rangle}$$
$$= \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$$

- $\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle$

$$\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y+\beta z, x\rangle}$$

$$= \overline{\alpha \langle y,x \rangle + \beta \langle z,x \rangle}$$

$$= \overline{\alpha \langle y,x \rangle} + \overline{\beta \langle z,x \rangle}$$

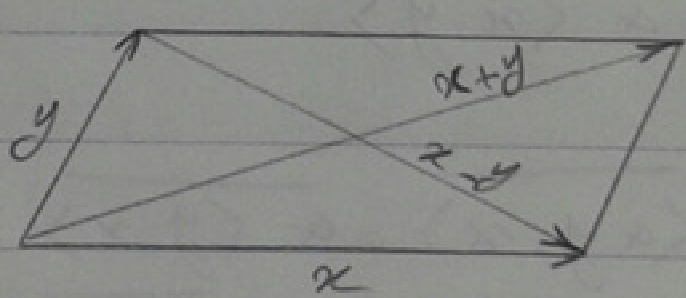
$$= \bar{\alpha} \langle x,y \rangle + \bar{\beta} \langle x,z \rangle$$

ملاحظة:

إن كل نظيم مشتق من جداء داخلي لابد أن يحقق مساواة متوازي الأضلاع.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

ومنه ليس بالضرورة أن يكون كل فضاء منظم هو فضاء جداء داخلي.



تعريف (التعامد):

يقال عن عنصر x في فضاء جداء داخلي X إنه متعامد مع العنصر y من X

إذا كان $\langle x,y \rangle = 0$

ونكتب $x \perp y$

وبصورة مماثلة إذا كان x يعامد مجموعة جزئية

$x \perp A \Leftarrow$ x عمودي على أي عنصر من A.

أمثلة :

1ـ الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$:

لنأخذ عنصرين x, y من هذا الفضاء حيث :

$$x = (\xi_i)_{i=\overline{1:n}} \quad , \quad y = (\eta_i)_{i=\overline{1:n}}$$

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \cdots + \xi_n \eta_n$$

إنَّ $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ هو فضاء جداء داخلي لأنه يحقق الخواص السابقة

ونجد أنَّ :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$
$$= (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

2ـ الفضاء $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{\eta_2} + \cdots + \xi_n \overline{\eta_n}$$

$$\|x\| = (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

وهو فضاء جداء داخلي.

3ـ الفضاء $L^2[a,b]$:

هو متمم للفضاء $C[a,b]$.

وجدنا أنَّ :

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

والجداء الداخلي:

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \, y(t) \, dt$$

أمّا إذا كانت الدوال عقدية فإنّ :

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

"وذلك لأنّ $\xi\cdot\bar{\xi} = |\xi|^2$ "

4- فضاء متتاليات هلبرت ℓ^2:

$x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$ حيث $x, y \in \ell^2$

فإنّ :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

وكلاً من x, y تحقق :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty \quad , \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2 < \infty$$

لنبرهن أنّ $\langle x, y\rangle$ موجود أي لنبرهن أن المتسلسلة متقاربة.

نستخدم كوشي شفارتز:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

حيث أنّ :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\xi}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2}$$

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2}$$

وبالتالي: $|\langle x,y\rangle| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{موجود}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{موجود}}$

حيث أن $x,y \in \ell^2$

وبالتالي $\langle x,y\rangle$ موجود.

5- الفضاء ℓ^p:

إنّ الفضاء ℓ^p، عندما يكون $p \neq 2$ ليس فضاء جداء داخلي وبالتالي فإنّ ℓ^p ليس فضاء هيلبرت.

6- الفضاء $C[a,b]$:

الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي وبالتالي فإنّه ليس فضاء هلبرت

حيث أنّ: $\|x\| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)|$

لا يشتق من جداء داخلي.

- إذا كان لدينا فضاء جداء داخلي حقيقي فإنّ:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

أما إذا كان الفضاء عقدياً فإنّ:

$$Re\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

$$Im\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

"مطلوب برهان هذه العلاقات"

متراجحة كوشي شفارتز. متراجحة المثلث :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

وإنّ الشرط اللازم والكافي كي ترد إشارة التساوي في المتراجحة السابقة هو أن يكون y, x مرتبطان خطياً.

أي أنّ :

y, x مرتبطان خطياً $\iff$ $|\langle x,y\rangle| = \|x\| . \|y\|$

متراجحة المثلث :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

وإنّ :

$y=0$ أو $x = cy$ $\iff$ $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

انتهت المحاضرة