المحاضرة السابعة..

الإثنين 6/4/2015

من الحقائق الأساسية المتعلقة بالمؤثرات الخطية أن الاستمرار والمحدودية يعتبران مفهومين متكافئين.

ليكن $T : D(T) \to Y$ أي مؤثر ليس بالضرورة خطياً، حيث $D(T) \subset X$، وحيث X و Y فضاءان منظمان.

وبما أن المؤثرات هي تطبيقات وبالتالي فإن تعريف الاستمرار للتطبيقات ينطبق عليها.

أي أن: المؤثر T يكون مستمراً في النقطة x_0 من $D(T)$ إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد موجب δ بحيث يكون:

$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ أياً كان x من $D(T)$ المحقق للشرط $\|x - x_0\| < \delta$

ويكون T مستمراً إذا كان T مستمراً في كل نقطة x من $D(T)$.

مبرهنة (الاستمرار والمحدودية):

ليكن $T : D(T) \to Y$ مؤثراً خطياً، حيث $D(T) \subseteq X$، وحيث X و Y فضاءان منظمان، عندئذ نجد ما يلي:

أ- الشرط اللازم والكافي كي يكون T مستمراً هو أن يكون T محدوداً.

ب- إذا كان T مستمراً في نقطة واحدة فقط، فإنه مستمر.

البرهان:

١- إذا كان المؤثر صفري $T=0$ فإنه محدود ومستمر.

سنفترض أنَّ $T \neq 0$ عندئذٍ يكون $\|T\| \neq 0$ (برهنا أنه نظيم)

سنفرض أنَّ T محدود وسنثبت الاستمرار:

لنأخذ نقطة اختيارية x_0 من $D(T)$ وليكن $\varepsilon > 0$ (مثبت)

لنأخذ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$ (وذلك بعد حل متراجحة المستقر لتعريف الاستمرار)

(إنَّ δ موجودة حيث ε معطى و $\|T\| \neq 0$)

إذا كان x أي عنصر من $D(T)$ يحقق الشرط $\|x - x_0\| < \delta$

لنبرهن أنَّ: $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$

بسبب خطية T:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\,\|x - x_0\| \quad (T \text{ محدود})$$
$$< \|T\|\,\delta$$
$$< \|T\|\,\frac{\varepsilon}{\|T\|}$$
$$< \varepsilon$$

لنثبت العكس:

سنفرض أنَّ T مستمر في x_0 من $D(T)$ وسنبرهن المحدودية.

عندئذٍ من أجل $\varepsilon > 0$ فيوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ $\qquad$ $\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$ $\qquad$ أيًا كان العنصر x من $D(T)$ الذي يحقق $\|x - x_0\| < \delta$.

$\leq \Leftarrow <$ حيث $\qquad$ لنأخذ $y \neq 0$ من $D(T)$ ولنضع $x - x_0 = \dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot y$

عندئذ: $\|x - x_0\| = \delta$

بسبب خطية T نجد:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}\, y\right)\right\|$$

$$= \frac{\delta}{\|y\|}\, \|Ty\| \leq \varepsilon$$

وبالتالي $\|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\, \|y\|$

$$\|Ty\| \leq c\, \|y\| \quad ; \quad y \in D(T)$$

وبالتالي إن T محدود.

ب- إن استمرار T في نقطة يقتضي محدودية T استناداً إلى القسم الثاني من برهان (أ) وهذا بدوره يقتضي استمرار T وفق (أ).

أو ببساطة نقول:

إن الاستمرار في نقطة يؤدي إلى الاستمرار على كامل الساحة وذلك بسبب الخطية.

$$\|x - x_0\| = \left\|\frac{\delta}{\|y\|}(y - 0)\right\| \Leftarrow x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|}(y - 0)$$

$$= \alpha\, \|y\|$$

نتيجة:

إذا كان T مؤثر خطي محدود فإنّ:

أ- $x_n \to x$ [حيث $x, x_n \in D(T)$] تقتضي $Tx_n \to Tx$ في $R(T)$.

ب- الفضاء الصفري $N(T)$ مغلق.

البرهان:

أنتعامل مع فضاءات منتهية ...

أ- $\|Tx_n - Tx\| \leq \|T\|\,\|x_n - x\|$

من أجل أي متتالية متقاربة من x

فإنّ صورة المتتالية متقاربة من Tx

$$0 \leq \|Tx_n - Tx\| \leq \|T\|\,\|x_n - x\|$$

$$\Rightarrow \|Tx_n - Tx\| \to 0$$

$$\Rightarrow Tx_n \to Tx$$

ملاحظة: لإثبات أنّ $x_n \to x$ يكفي أن نثبت أنّ: $\|x - x_n\| \to 0$

لماذا؟

حسب تعريف النهاية: $\big|\, \|x_n - x\| - 0 \,\big| < \epsilon$ محققة

$$\|x_n - x\| < \epsilon \Rightarrow x_n \to x.$$

- $|x - A| < \epsilon$ فإن $x \to A$

- $|B - A| < \epsilon$ فإنّ $B = A$ (ثابتة)

ب- $N(T) \subseteq \overline{N}(T)$ دوماً.

لنثبت أنّ $\overline{N}(T) \subseteq N(T)$

لنأخذ $x \in \bar{N}(T)$ وبالتالي فإنه يوجد متتالية (x_n) من عناصر $N(T)$

بحيث أن $x_n \longrightarrow x$.

لدينا T محدود وبالتالي $Tx_n \longrightarrow Tx$ حسب (P)

بما أن $x_n \in N(T)$ فإنّ $Tx_n = 0$ (هي متتالية صفرية نهايتها الصفر)

وبالتالي $Tx = 0$ أي أنّ $x \in N(T)$

وبالتالي $\bar{N}(T) \subseteq N(T)$

$N(T)$ مغلق $\Rightarrow \bar{N}(T) = N(T) \Rightarrow$

ملاحظة:

تركيب

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \, \|T_2\|$$

حيث $T_2 : X \longrightarrow Y$ و $T_1 : Y \longrightarrow Z$ و $T : X \longrightarrow X$ مؤثرات خطية محدودة وحيث X و Y و Z فضاءات منظمة.

الإثبات:

$$\|T_1 T_2 x\| = \|T_1 (T_2(x))\|$$

$$= \sup_{\|T_2(x)\|=1} \|T_1 (T_2(x))\|$$

T_1 محدود:

$$\|T_1 T_2(x)\| \leq \|T_1\| . \|T_2 x\|$$

$$\leq \|T_1\| . \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|$$

كون T_2 محدود فإنّ $\sup \|T_2 x\|$ هو $\|T_2\|$

$$\|T_1 T_2(x)\| \leq \underbrace{\|T_1\| \, \|T_2\|}$$

عدد ثابت يلعب دور حد أعلى للطرف الأيسر

إنّ $\|T_2\|\|T_1\|$ يلعب دور حد أعلى للطرف الأيسر ولما كان sup
هو أصغر الحدود العليا فإنّ sup للطرف الأيسر هو أصغر أو يساوي
$\|T_2\|\|T_1\|$

و $\sup\|T_1 T_2(x)\| = \|T_1 T_2\|$

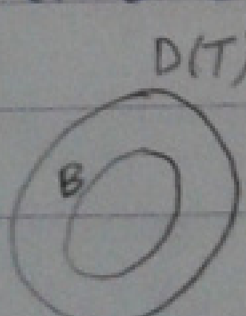
وبالتالي $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$

ويمكن إثبات أنّ: $(n\in\mathbb{N})$ $\|T^n\| \leq \|T\|^n$
بالاستقراء الرياضي.

تعاريف:

• نقول عن مؤثرين T_1 و T_2 إنهما متساويان ونكتب $T_1=T_2$
إذا كان لهما ساحة واحدة أي إذا كان $D(T_1)=D(T_2)$ وكان
$T_1 x = T_2 x$ أيًّا كان x من $D(T_1)=D(T_2)$

• إنّ مقصور مؤثر $T:D(T)\to Y$ على مجموعة جزئية B من $D(T)$ يرمز
إليه بالشكل: $T|_B = \bar{T}$
(مقصور T على B)



يعرف مؤثر جديد:
$\bar{T}x = Tx$

• ممدد مؤثر T إلى مجموعة M تحوي $D(T)$ هو مؤثر $\tilde{T}:M\to Y$

بحيث أنَّ $T|_{D(T)} = T$ أي أنَّ $\overline{T}x = Tx$

وفي النقاط التي لا تنتمي إلى $D(T)$ يكون T غير موجود.

مثال:

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad x \neq 0$

معرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

تمديده:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ \underline{\underline{2}} & x = 0 \end{cases}$$

لو كان 1 فإننا نقول أننا مددناه باستمرار.

الانتهت المحاضرة..

SABBAGH STATIONERY