الأربعاء: 11/3/2015

المحاضرة الثانية:

الفصل الأول:

"قابلية القسمة في Z وتطبيقاتها"

تعريف قابلية القسمة:

نقول عن العدد الصحيح $a \neq 0$ إنه يقسم العدد الصحيح b إذا وجد عدد صحيح c بحيث يكون $b = a.c$ ونسمي a قاسماً لـ b ونكتب $a|b$ ، ونسمي b مضاعفاً لـ a وإذا كان a لا يقسم b نكتب $a \nmid b$

خواص قابلية القسمة:

1) العدد واحد يقسم جميع الأعداد الصحيحة ، والصفر مضاعف لأي عدد صحيح

2) إذا كان $a|b \Leftarrow -a|b$

3) كل عدد يقسم نفسه

$a|a \quad a \neq 0 \; ; \; \forall a \in Z$ لأن $a = 1.a$

4) إذا كان $a|c \Leftarrow a|k.c \; ; \; \forall k \in Z$

5) إذا كان $a|b \wedge b|c \Leftarrow a|c$

البرهان:

$a|b \Leftarrow b = a.d_1$

$b|c \Leftarrow c = b.d_2$

$c = (a.d_1).d_2 = a.(d_1.d_2) \Leftarrow a|c$

6) إذا كان $c|a \wedge c|b \Leftarrow c|na+bm \; ; \; n,m \in Z$

أي يقسم التركيب الخطي لها

تعريف:

إذا كان $c \mid a_i \quad (i=1,2,\dots,n)$

فإنه

$$c \mid x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n \quad ; \quad x_i \in \mathbb{Z}$$

7) إذا كان $a \mid b \; ; \; b \neq 0 \Rightarrow |a| \leqslant |b|$

8) إذا كان $a \mid b \wedge b \mid a \Leftrightarrow |a| = |b|$

لأنه حسب الخاصة (7)

$$|a| \leqslant |b| \wedge |b| \leqslant |a| \Leftrightarrow |a| = |b|$$

9) مجموعة القواسم منتهية.

المبرهنة الأساسية في الحساب (مبرهنة إقليدس):

إذا كان b, a عددين صحيحين و $a \neq 0$ فإنه يوجد عددان صحيحان q, r وحيدان بحيث يكون:

$$b = aq + r \quad \text{حيث} \quad 0 \leqslant r < |a|$$

الإثبات:

نأخذ مجموعة من الأعداد الصحيحة ولتكن S ;

$$S = \{x \geqslant 0 \; ; \; x = b - at \; ; \; t \in \mathbb{Z}\}$$

S مجموعة غير خالية وهي مجموعة جزئية (لأنها من $\mathbb{Z}$) فحسب مبدأ الترتيب الحسن يوجد عنصر أصغر في S نسميه r ، ولتكن قيمة t الموافقة لهذا العنصر هي q

وعندها يمكن أن نكتب:

طالما أنه من S $r \geqslant 0 \Rightarrow r = b - aq$

ولنثبت أن $r < |a|$

نفرض جدلاً أن:

$r \geqslant |a|$ أي $r - |a| \geqslant 0$

إذا كانت $a > 0$ فإنه:

$$r-|a| = r-a = b-aq-a = b-a(q+1) \in S$$

لأن:

$x = r-|a| \geqslant 0$ وهو من الشكل $x = b-at$

إذا كانت $a<0$:

$$r-|a| = r+a = b-aq+a = b-a(q-1) \in S$$

وجدنا أن:

$r-|a|$ عنصر من S وهو عنصر أصغر من r العنصر الأصغر وهذا تناقض

إذاً $r<|a|$

لنثبت أن العددين q و r وحيدان

نفرض أنه يوجد عددان صحيحان q_1 و r_1 يحققان:

$$b = aq_1+r_1 \quad ; \quad 0 \leqslant r_1 < |a|$$

$$b = aq+r \quad ; \quad 0 \leqslant r < |a|$$

$$aq_1+r_1 = aq+r \Rightarrow a(q_1-q) = r-r_1$$

أي أن $r-r_1$ مضاعف للعدد a وأصغر من a وهذا محقق فقط إذا كان:

$$r-r_1 = 0 \Rightarrow r = r_1$$

ومنه $q = q_1$

وهو المطلوب

مثال:

من أجل $b=23$, $a=3$ نجد: $23 = 7(3)+2$

$r=2$, $q=3$

مثال:
أثبت أن مربع أي عدد فردي يزيد على مضاعفات العدد 8 بالواحد.

b عدد فردي $\Rightarrow$ $b^2 = 8M + 1$

الإثبات:
إن باقي قسمة أي عدد فردي على العدد 2 يساوي الواحد لذا:

b عدد فردي $\Rightarrow$ $b = 2n + 1$

بتربيع الطرفين $\Rightarrow$ $b^2 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$

$= 4n(n+1) + 1$

n و $(n+1)$ عددين متتاليين أحدهما زوجي والآخر فردي ومنه $n(n+1) = 2M$

$\Rightarrow$ $b^2 = 8M + 1$

تمرين: (1)
أثبت أن $6 \mid f(m) = 5m^3 + 7m$ حيث $m \in \mathbb{N}$

الحل:
1) خطوة البداية: نثبت صحتها من أجل $m = 0$

$f(0) = 0 \Rightarrow 6 \mid 0$

العلاقة صحيحة

وكذلك من أجل $m = 1$

$f(1) = 5(1) + 7 = 12 \Rightarrow 6 \mid f(1) = 12$

العلاقة صحيحة

2) خطوة الاستقراء: نفرض صحة العلاقة من أجل $m = k$ أي أن:

$6 \mid f(k) = 5k^3 + 7k$ صحيحة

ولنبرهن صحتها من أجل $m = k+1$ أي لنبرهن أن:

$6 \overset{?}{\mid} f(k+1) = 5(k+1)^3 + 7(k+1)$

نأخذ:

$f(k+1) = 5(k+1)^3 + 7(k+1)$

$= 5(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 7k + 7$

$= 5k^3 + 7k + 15k^2 + 15k + 5 + 7$

$= f(k) + 15k(k+1) + 12$

ومنه $k(k+1) = 2N$ أي $k(k+1)$ عدد زوجي لأن أحد العددين المتتاليين عدد زوجي

$f(k+1) = f(k) + 30N + 12 \quad ; \quad k(k+1) = 2N$

ومنه نجد أن كل حد في $f(k+1)$ يقبل القسمة على 6

أي أن $6 \setminus f(k+1)$

ومنه العلاقة $6 \setminus f(m) = 5m^3 + 7m$ محققة من أجل كل $m \in \mathbb{N}$

تمرين : (2)

أثبت أن $n \geq 0$; $14 \setminus f(n) = 5^{2n+1} + 3^{4n+2}$

الحل :

1) خطوة البداية : نثبت صحة العلاقة من أجل $n = 0$

$f(0) = 5 + 3^2 = 14 \Rightarrow 14 \setminus f(0) = 14$

وكذلك من أجل $n = 1$

$f(1) = 5^3 + 3^6 = 125 + 729 = 854 = 14 \times 61$

$\Rightarrow 14 \setminus f(1)$

2) خطوة الاستقراء : نفرض أنها صحيحة من أجل $n = k$ أي

$14 \setminus f(k) = 5^{2k+1} + 3^{4k+2}$ صحيحة

ولنبرهن صحتها من أجل $n = k+1$

نأخذ : $f(k+1) = 5^{2k+3} + 3^{4k+6}$

$= 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 3^{4k+2} \cdot 3^4$

$= 5^2 (5^{2k+1} + 3^{4k+2}) - 5^2 \cdot 3^{4k+2} +$

$3^{4k+2} \cdot 3^4$

$$= 5^2 f(k) + 3^{4k+2} (3^4 - 5^2)$$

$$= 5^2 f(k) + 3^{4k+2} . (56)$$

$$= 5^2 f(k) + 3^{4k+2} . (14 \times 4)$$

ومنه نجد أنّ كل حدي $f(k+1)$ يقبل القسمة على 14 ومنه $14 \mid f(k+1)$

أي أن العلاقة محققة من أجل كل $n \geq 0$.

وهو المطلوب