المحاضرة الخامسة..

2015/3/24..

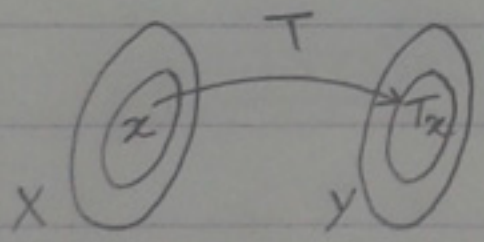
المؤشرات الخطية المحدودة والمستمرة:

تعريف:

المؤشر الخطي المحدود:

ليكن X و Y فضاءين منظمين، وليكن $T: D(T) \to Y$ مؤثراً خطياً حيث $D(T) \subset X$، نقول عن المؤثر T إنه محدود إذا وجد عدد حقيقي c بحيث تتحقق المتباينة:

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad (1)$$
$$\forall x \in D(T)$$



بحيث تتحول في مجموعة محدودة

إنّ المؤثر الخطي T المحدود (أي أنه يحقق المتراجحة (1)) يصور المجموعات المحدودة في $D(T)$ إلى مجموعات محدودة في Y.

ملاحظة:

إنّ استعمالنا هنا لكلمة (محدود) مغاير لاستعمالنا لها في التحليل الحقيقي حيث نعني بالدالة المحدودة الدالة التي يكون مداها مجموعة محدودة.

$$F: X \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$$

F محدود إذا كان: $|F(x)| \leq K$

هذه الكرة أعم حيث أنّ كل دالة هي مؤثر

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

$\|x\| = d(x,0)$ أي أنّ $\|x\|$ محدود أي أنه أصغر من ثابت

وبالتالي $\|Tx\|$ ثابت $\leq \|Tx\|$.

إذا وجد أي ثابت c يحقق المتراجحة (1) نقول إن T محدود

وأصغر c يحقق هذا التراجح ندعوه نظيم المؤشر

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$$

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \qquad (2)$$

إذا كان $D(T) = \{0\}$ فإننا نضع $\|T\| = 0$ تعريفاً. وبالتالي المؤشر هو المؤشر الصفري .

وبالتالي المتراجحة (1) يمكن أن تكتب بعد وضع $\|T\| = c$ بالشكل:

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \qquad (3)$$

وبالتالي يكون المؤشر الخطي محدود إذا تحققت المتراجحة السابقة (3).

تمهيدية:

ليكن T مؤشراً خطياً محدوداً كما عرفناه سابقاً في (2) عندئذٍ نجد مايلي:

P. ثمة صيغة بديلة لنظيم T محددة بالدستور.

$$\|T\| = \sup \|Tx\|$$

x تتحول على الكرة الكروية المرة الواحدة.

$$\|x\| = 1$$

أي نقطة في الفضاء يمكن إعادتها إلى الكرة الواحدية $x \in D(T)$

$$T\alpha x = \alpha Tx$$

SABBAGH STATIONERY

ب- النظيم المعرف بالمساواة (2) يحقق شروط النظيم.

البرهان:

1- إذا أخذنا النقطة $x \neq 0$ من $D(T)$ بحيث $\|x\| = a$ ولتكن

$y = \frac{1}{a} x$ فإننا نجد أن: $\|y\| = \|x\| / a = 1$

(عند تقسيم شعاع على طوله فإن النقطة ستنقل إلى قشرة الكرة الواحدية)

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{1}{a} \|Tx\|$$

x تمسح كامل $D(T)$

حسب شروط النظيم و فضية T نجد مايلي:

$$\|T\| = \sup \| \frac{1}{a} Tx \|$$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in D(T)}} \|Ty\|$$

نكتب x عوضاً عن y في الطرف الأيمن:

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in D(T)}} \|Tx\|$$

ملاحظة:

كيف استطعنا أن نبدل $\|x\|$ بـ $\frac{1}{a}$ في تعريف $\|T\|$؟

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\}$$

نأخذ نقطة x_1 من $D(T)$ ولكن $\|x_1\| = a_1$ و $x_1 \neq 0$

$y_1 = \frac{1}{a_1} x_1$ سيكون من $D(T)$ لأنّ $D(T)$ مجموعة.

$$\frac{\|Tx_1\|}{\|x_1\|} = \left\|\frac{1}{a_1} Tx_1\right\| \quad \Leftarrow \quad \frac{\|Tx_1\|}{\|x_1\|} = \frac{1}{a_1}\|Tx_1\|$$

وبالتالي يكون

$$\frac{\|Tx_1\|}{\|x_1\|} = \|Ty_1\| \quad \Leftarrow$$

نأخذ نقطة x_2 من $D(T)$ ولكن $\|x_2\| = a_2$ و $x_2 \neq 0$ ولكن $y_2 = \frac{1}{a_2} x_2$

وبالتالي:

$$\frac{\|Tx_2\|}{\|x_2\|} = \|Ty_2\|$$

نتابع بنفس الطريقة فتشكل لدينا المجموعة:

$$\sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|=1}} \{\|Ty_1\|, \|Ty_2\|, \dots\}$$

ثم نبدل كل y بـ x

ب- 1-

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\| \neq 0}{\|x\| \neq 0} \geq 0$$

2-

$$\|T\| = 0 \iff T = 0$$

$$\|Tx\| = 0 \iff T = 0 \quad \forall x$$

$$T0 = 0$$

$$T = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow \sup \|Tx\| = 0 \Rightarrow \|T\| = 0$$

$$\|\alpha T\| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|\alpha Tx\| = |\alpha| \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \quad .3$$

$$= |\alpha| \, \|T\|$$

4- متراجحة المثلث

لنأخذ T_1, T_2 مؤثرين خطيين محدودين المؤثرات التي منطلقها $D(T)$ عندئذٍ:

$$\|T_1 + T_2\| \overset{?}{\leq} \|T_1\| + \|T_2\|$$

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|(T_1 + T_2)(x)\|$$

$$= \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|T_1(x) + T_2(x)\| \overset{?}{\leq}$$

$$\sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|T_1(x)\| + \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|T_2(x)\|$$

$$= \|T_1\| + \|T_2\|$$

لدينا العلاقة الصحيحة التالية: لكن الستقيم فضاء منظم إذاً المتراجحة صحيحة

$$\|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq \sup \|T_1 x\| + \sup \|T_2 x\|$$

وبالتالي نجد:

$\|T_1(x) + T_2(x)\|$ عندئذٍ صغيرة على $\sup \|T_1 x\| + \sup T_2 x\|$

وطالما كان sup هو أصغر الحدود العليا فيكون:

$$\sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|$$

حيث x من $D(T)$.

ملاحظة:

- T مؤثر أما $T(x)$ نقطة في المستقر .
- $\|x\|$ نظيم المتغلو أما $\|Tx\|$ نظيم المستقر و $\|T\|$ نظيم المؤثر.

انتهت المحاضرة..