## المحاضرة الثانية :

**نقطة التجمع :** نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}$ بأنها نقطة تجمع (تراكم أو نهاية) للمجموعة $A \subseteq R$ إذا تحقق أحد الشروط :

1) من أجل أي مجال مفتوح يحوي $x_0$ فإنه يحوي عدد غير منته من عناصر $A$

$$A' = ]a,b[' = [a,b]$$

(كل النقاط التي داخل المجال هي نقاط تجمع بالإضافة إلى الأطراف)

# نقاط تجمع الدائرة : هي الدائرة مع محيطها
" " الكرة : هي الكرة مع سطحها

القرص المفتوح كل نقاطه داخلية

2) من أجل أي مجال مفتوح يحوي $x_0$ فإنه يحوي على الأقل نقطة من $A\setminus\{x_0\}$ (أي يحوي على الأقل نقطة أخرى غير $x_0$)

3) توجد متتالية غير ثابتة من عناصر $A$ مثل $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث

$$\underset{n\to\infty}{\text{lin}}\, x_n = x_0$$

مثلاً: $a_n = 1$ متتالية ثابتة

$a_n = \frac{1}{n}$ متتالية غير ثابتة

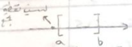
# إذا $x_0$ انتمت إلى $A$ تصبح مجموعة مغلقة.

4) من أجل أي مجموعة مفتوحة في $R$ تحوي $x_0$ فإنها تحوي عدد غير منته من عناصر $A$

5) من أجل أي مجموعة مفتوحة في $R$ تحوي $x_0$ فإنها سوف تحوي على الأقل نقطة واحدة من $A\setminus\{x_0\}$ نرمز لنقاط التجمع بـ $A'$

أمثلة :

$1)\ [a,b[' = [a,b]$



$2)\ [a,b]' = [a,b]$

$]-\infty,a[ \cup ]b,+\infty[ = ]-\infty,a] \cup [b,+\infty[$

$3)\ \{1,2,3\}' = \emptyset$

ليست نقطة تجمع لأن مثلاً $2 \in ]1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}[$ لكن هذا المجال ليس يحتوي في المجموعة ومنه نستنتج أن المجموعة المنتهية ليس لها نقاط تجمع

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}' = \emptyset$ لأنها منتهية

$4)\ \mathbb{Z}' = \emptyset$

$5)\ \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = \{0\}$

(نقطة تجمع وحيدة للمتتاليات المتقاربة)

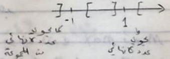
# مثال عن مجموعة محدودة وغير منتهية $]0,1]$ أو مثلاً $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$

$6)\ \{(-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{فردي} \\ \frac{-n}{n+1} & \text{زوجي} \end{cases}$$

وبالتالي أصبح لدي نهايتين فإن

$\{(-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}\}'_{n\in N} = \{-1, 1\}$



المجموعة المغلقة: نقول عن المجموعة $A$ من $\mathbb{R}$ انها مغلقة في $\mathbb{R}$ إذا كانت متممتها مفتوحة في $\mathbb{R}$

$]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ مغلقة لأن ← $]a, b[$ مفتوحة

امثلة: - لو أخذنا $[a, b]$ ← متممتها $]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$

- $]-\infty, b]$ مجموعة مغلقة.

- $[a, +\infty[$ مجموعة مغلقة.

- $]-\infty, +\infty[$ مجموعة مغلقة ← لأن متممتها $\emptyset$ مفتوحة

# $\emptyset$ , $\mathbb{R}$ مفتوحتان ومغلقتان بآن واحد

ملاحظة: $A = [a, b]$ فإن

$Max(A) = b = sup(A)$

$Min(A) = a = inf(A)$

- إذا كان Max موجود بالمجموعة هو نفسه sup

〃 〃 min 〃 〃 〃 〃 inf

---

مثال: لو أخذنا $]0, 1[$ , $f(x) = x^2$

أوجد inf , sup , Max , Min

الحل: $\sup f(x) = 1$ , $\inf f(x) = 0$ $0 < x < 1$

max و Min لا يوجد

# إذا كان لدي مجال مفتوح فلا يوجد لدي Max و Min

أو إذا كان المجال مغلق فيوجد Max , Min

ويكون أيضاً $sup = Max$

$inf = Min$

مثال: لنأخذ المجموعة: $\{1,2,3\}=[1,1]\cup[2,2]\cup[3,3]$

هل هي مغلقة ؟ :

**الحل:** نأخذ متممتها : $]-\infty,1[\cup]2,3[\cup]3,+\infty[$

مثال: لتكن لدينا المجال $]a,b]$ هي ليست مغلقة وليست مفتوحة

وذلك من خلال رؤيتنا لمتممتها : $]-\infty,a[\cup[b,+\infty[$

ليست مغلقة لأن متممتها ليست

اجتماع مجالات مفتوحة

# ملاحظة إن كان المجال أو المجموعة هي مغلقة

فنقوم بأخذ المتممة .

ملاحظات:

1- $\emptyset$ ، $\mathbb{R}$ مجموعتان مفتوحتان أو مغلقتان بآن واحد

2- المجموعات المنتهية في $\mathbb{R}$ هي مجموعات مغلقة :

**نتائج:**

1) اجتماع مجموعتين مغلقتين في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$

2) تقاطع مجموعتين " " " " " " " "

3) اجتماع عدد منتهٍ من المجموعات المغلقة في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مغلقة في

4) تقاطع عدد منتهٍ " " " " " " " " " "

**مبرهنة:** $A$ مغلقة في $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $A$ تحوي نقاط تجمعها أي $(A'\subset A)$

**مثال:** $[a,b]$ مجموعة مغلقة

$]-\infty,b]$

$[a,+\infty[$

**مثال:** هل $\mathbb{Q}$ مغلقة ولماذا ؟

هي غير مغلقة، لنأخذ متتالية يجب أن نثبت أن نهايتها
لا تنتمي لـ $\mathbb{Q}$

**مثلاً** $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n!}$ حيث $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin \mathbb{Q}$$

فإذا كانت $\mathbb{Q}$ مغلقة يجب أن تحوي نقاط تجمعها

ولكن $\mathbb{Q}$ لا تحوي جميع نقاط تجمعها

5) إذا كانت $A$ مغلقة فإن $\inf(A)\in A$ ، $\sup(A)\in A$ $\quad [\underset{\inf}{a}, \underset{\sup}{b}]$

نلاحظ المجالات $[a,b]$ مغلقة $\quad [a,b[$ ليست لا مغلقة ولا مفتوحة

$]-\infty,b]$ مغلقة $\quad ]a,\infty[$ مفتوحة