/ /

حلول عددية

المحاضرة الثالثة عشرة

٤/٥/٢٠١٥

4 طريقة العناصر المنتهية : (الاستنتاج النظري غير مطلوب)

بما أننا ندرس بعداً واحداً فقط ، فإن خطوات طريقة العناصر المنتهية هي كالتالي :

١) التقطيع : meshing

وهو تجزئة المجال المعطى (في دراستنا هو $[0,1]$) إلى n مجالاً جزئياً (عنصراً) باستخدام العقد :

$$0 = x_0 < x_1 < \text{------} < x_{n-1} < x_n = 1$$

فيكون لكل عنصر (مجال) الشكل : $e = [x_{j-1}, x_j]$

وطوله : $h_j = x_j - x_{j-1}$

(أي لا يشترط أن تكون أطوال المجالات متساوية)

2) اختيار توابع القاعدة : (الاختبار)

سنختار توابع القاعدة على أنها توابع القبعة ، بحيث يكون لدينا $n-1$ تابع قبعة (عددها مساوٍ لعدد العناصر ناقص واحد) كما يلي :

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & ; x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & ; x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

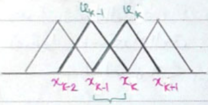
③ إيجاد معادلات كل عنصر:

وسنستفيد في ذلك من طريقة غاليركين، حيث سنطبقها على كل عنصر لإيجاد جملة مصفوفية لكل عنصر على حدة.

إن الحل عند العنصر k ($e_k = [x_{k-1}, x_k]$) يكون له الشكل:

$$u^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i(x)$$

ولكن على المجال e_k فإن كل توابع القاعدة $\varphi_i(x)$ تكون معدومة عدا التابعان φ_{k-1}, φ_k.



وبالتالي سيكون الحل عند هذا العنصر الشكل:

$$u^{(k)}(x) = c_{k-1}\varphi_{k-1} + c_k \varphi_k$$

إن الشكل المصفوفي عند العنصر k من الشكل: $A^{(k)} C^{(k)} = B^{(k)}$

$$\begin{bmatrix} a^{(k)}_{k-1\,k-1} & a^{(k)}_{k-1\,k} \\ a^{(k)}_{k\,k-1} & a^{(k)}_{k\,k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{k-1} \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(k)}_{k-1} \\ b^{(k)}_k \end{bmatrix}$$

حيث:

$$\begin{cases} a^{(k)}_{ij} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[p\varphi_j' \varphi_i' + q\varphi_j' \varphi_i + r\varphi_j \varphi_i \right] dx \\ b^{(k)}_i = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cdot \varphi_i \, dx \end{cases}$$

مهم

وذلك من قوانين طريقة غاليركين.

ملاحظة: إن الدليل العلوي يعبّر عن رقم العنصر الذي نحسب القيم عنده.

/ /

حالة خاصة:

* عند العنصر الأول، أي عندما $k=1$ فإن المصفوفة $A^{(1)}$ لها الشكل:

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{00}^{(1)} & a_{01}^{(1)} \\ a_{10}^{(1)} & a_{11}^{(1)} \end{bmatrix}$$

ولكن القيم $a_{10}^{(1)}, a_{01}^{(1)}, a_{00}^{(1)}$ غير موجودة، وذلك لعدم وجود دالة قاعدة u_0
لذلك ستكون المصفوفة: $A^{(1)}=[a_{11}^{(1)}]$
وكذلك فإن المصفوفة: $B^{(1)}=[b_1^{(1)}]$ وذلك لعدم وجود القيمة $b_0^{(1)}$.

* أيضاً نلاحظ أنه عند العنصر الأخير عندما $k=n$ فإن:

$$A^{(n)}=\begin{bmatrix} a_{n-1\,n-1}^{(n)} & a_{n-1\,n}^{(n)} \\ a_{n\,n-1}^{(n)} & a_{n\,n}^{(n)} \end{bmatrix}$$

ولكن القيم $a_{nn}^{(n)}, a_{n\,n-1}^{(n)}, a_{n-1\,n}^{(n)}$ غير موجودة، وذلك لعدم وجود دالة قاعدة u_n، لذلك ستكون المصفوفة: $A^{(n)}=[a_{n-1\,n-1}^{(n)}]$
وكذلك فإن المصفوفة $B^{(n)}=[b_{n-1}^{(n)}]$ بسبب عدم وجود القيمة $b_n^{(n)}$.

3) التجميع: نضع مصفوفات العناصر في مصفوفات كلية، للحصول على جملة معادلات مصفوفية شاملة:

$$AC=B$$

حيث أن مصفوفة الصلابة A ستكون شبه قطرية (ثلاثية الأقطار) كما يلي:

حفظ

عناصر قطرها الرئيسي: $\boxed{a_{ii}=a_{ii}^{(i)}+a_{ii}^{(i+1)}}$

العناصر فوق القطر الرئيسي: $\boxed{a_{i\,i+1}=a_{i\,i+1}^{(i+1)}}$

العناصر تحت القطر الرئيسي: $\boxed{a_{i\,i-1}=a_{i\,i-1}^{(i)}}$

أما بقية العناصر في A ستكون كلها عبارة عن أصفار.

ومنه مصفوفة الصلابة A لها الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} + a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & 0 & \cdots \\ 0 & a_{32}^{(3)} & a_{33}^{(3)} + a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & 0 \quad \cdots \\ 0 & 0 & a_{43}^{(4)} & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

أما عناصر متجه الحمولة الكلي B فتعطى بالشكل:

حفظ $\boxed{b_i = b_i^{(i)} + b_i^{(i+1)}}$; $i = \overline{1, n-1}$

وعليه فإن متجه الحمولة الكلي يكون له الشكل:

$$B = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} + b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} + b_2^{(3)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} + b_{n-1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

مثال: أوجد الشكل المصفوفي لمسألة القيم الحدية التالية:

$$-u'' + u = x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

حيث $u(0)=u(1)=0$

وذلك باستخدام طريقة العناصر المنتهية وتوابع قاعدة خطية قطعياً.

وبحيث $h=0.2$.

الحل: بمقارنة المعادلة التفاضلية المعطاة مع الشكل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة نجد أن:

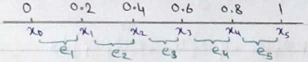
$$p(x)=1 \quad , \quad q(x)=0 \quad , \quad r(x)=1 \quad , \quad f(x)=x$$

أولاً: التقطيع: إن $h=0.2$ ، وبالتالي نحصل على $n=5$ مجالات:

$$e_1=[0,0.2] \quad , \quad e_2=[0.2,0.4]$$

$$e_3=[0.4,0.6] \quad , \quad e_4=[0.6,0.8]$$

$$e_5=[0.8,1]$$



ثانياً: نختار $n-1=4$ توابع قاعدة (توابع قبعة):

$$u_i(x)=\begin{cases} 0 & ; x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \frac{1}{h}(x-x_{i-1}) & ; x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{1}{h}(x_{i+1}-x) & ; x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$u_i'(x)=\begin{cases} 0 & ; x \notin]x_{i-1}, x_{i+1}[\\ \frac{1}{h}=\frac{1}{0.2} & ; x \in]x_{i-1}, x_i[\\ \frac{-1}{h}=\frac{-1}{0.2} & ; x \in]x_i, x_{i+1}[\end{cases}$$

$$u_1=\begin{cases}0 & ; x\notin[0,0.4]\\ \frac{x}{0.2} & ; x\in[0,0.2]\\ \frac{0.4-x}{0.2} & ; x\in[0.2,0.4]\end{cases} \quad , \quad u_2=\begin{cases}0 & ; x\notin[0.2,0.6]\\ \frac{x-0.2}{0.2} & ; x\in[0.2,0.4]\\ \frac{0.6-x}{0.2} & ; x\in[0.4,0.6]\end{cases}$$

$$u_3=\begin{cases}0 & ; x\notin[0.4,0.8]\\ \frac{x-0.4}{0.2} & ; x\in[0.4,0.6]\\ \frac{0.8-x}{0.2} & ; x\in[0.6,0.8]\end{cases} \quad , \quad u_4=\begin{cases}0 & ; x\notin[0.6,1]\\ \frac{x-0.6}{0.2} & ; x\in[0.6,0.8]\\ \frac{1-x}{0.2} & ; x\in[0.8,1]\end{cases}$$

ولنبحث عن حل من الشكل:

$$u(x)=C_1u_1+C_2u_2+C_3u_3+C_4u_4$$

ثالثاً: نعطي معادلة كل عنصر k بـ $A^{(k)}C^{(k)}=B^{(k)}$ حيث:

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix}a^{(k)}_{k-1\,k-1} & a^{(k)}_{k-1\,k}\\ a^{(k)}_{k\,k-1} & a^{(k)}_{k\,k}\end{bmatrix} \quad , \quad B^{(k)}=\begin{bmatrix}b^{(k)}_{k-1}\\ b^{(k)}_{k}\end{bmatrix}$$

ولدينا:

$$a^{(k)}_{ij}=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[p u_j' u_i' + q u_j' u_i + r u_j u_i\right]dx$$

$$\Rightarrow a^{(k)}_{ij}=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[u_j' u_i' + u_j u_i\right]dx$$

وأيضاً:

$$b^{(k)}_i=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,u_i\,dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\,u_i\,dx$$

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}a^{(1)}_{00} & a^{(1)}_{01}\\ a^{(1)}_{10} & a^{(1)}_{11}\end{bmatrix}=\left[a^{(1)}_{11}\right]=\left[5.06666\right]$$

Subject:

$$a_{11}^{(1)} = \int_{x_0}^{x_1} [u_i' u_i' + u_i u_i]\, dx$$

حيث:

$$a_{11}^{(1)} = \int_0^{0.2} \left[\left(\frac{1}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{x}{0.2}\right)^2 \right] dx = 5.06666$$

وبنفس الطريقة سنجد المصفوفات التالية:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.06666 & -4.96666 \\ -4.96666 & 5.06666 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} \\ a_{32}^{(3)} & a_{33}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.06666 & -4.96666 \\ -4.96666 & 5.06666 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} \\ a_{43}^{(4)} & a_{44}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.06666 & -4.96666 \\ -4.96666 & 5.06666 \end{bmatrix}$$

$$A^{(5)} = \begin{bmatrix} a_{44}^{(5)} & a_{45}^{(5)} \\ a_{54}^{(5)} & a_{55}^{(5)} \end{bmatrix} = \left[a_{44}^{(5)}\right] = [5.06666]$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} b_0^{(1)} \\ b_1^{(1)} \end{bmatrix} = \left[b_1^{(1)}\right] = [0.01333]$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02666 \\ 0.03333 \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} b_2^{(3)} \\ b_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04666 \\ 0.05333 \end{bmatrix}$$

$$B^{(4)} = \begin{bmatrix} b_3^{(4)} \\ b_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06666 \\ 0.07333 \end{bmatrix}, \quad B^{(5)} = \begin{bmatrix} b_4^{(5)} \\ b_5^{(5)} \end{bmatrix} = \left[b_4^{(5)}\right] = [0.08666]$$

Subject: / /

رابعاً: التجميع: إن عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة الصلابة A هي:

$a_{11} = a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} = 10.13332$, $a_{22} = a_{22}^{(2)} + a_{22}^{(3)} = 10.13332$

$a_{33} = a_{33}^{(3)} + a_{33}^{(4)} = 10.13332$, $a_{44} = a_{44}^{(4)} + a_{44}^{(5)} = 10.13332$

أما العناصر فوق القطر الرئيسي فهي:

$a_{12} = a_{12}^{(2)} = -4.96666$, $a_{23} = a_{23}^{(3)} = -4.96666$

$a_{34} = a_{34}^{(3)} = -4.96666$

والعناصر تحت القطر الرئيسي:

$a_{21} = a_{21}^{(2)} = -4.96666$, $a_{32} = a_{32}^{(3)} = -4.96666$

$a_{43} = a_{43}^{(4)} = -4.96666$

وبقية العناصر ستكون أصفاراً.

أما عناصر متجه الحمولة B فتعطى كما يلي:

$b_1 = b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = 0.03999 \simeq 0.04$

$b_2 = b_2^{(2)} + b_2^{(3)} = 0.07999 \simeq 0.08$

$b_3 = b_3^{(3)} + b_3^{(4)} = 0.11999 \simeq 0.12$

$b_4 = b_4^{(4)} + b_4^{(5)} = 0.15999 \simeq 0.16$

فيكون الشكل المصفوفي للمسألة: $AC = B$

$$\begin{bmatrix} 10.13332 & -4.96666 & 0 & 0 \\ -4.96666 & 10.13332 & -4.96666 & 0 \\ 0 & -4.96666 & 10.13332 & -4.96666 \\ 0 & 0 & -4.96666 & 10.13332 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

نهاية المحاضرة الثالثة عشرة