أثبت أن تقاطع أسرة من المتراصات في فضاء متري متراص.

الحل:

ليكن $\{F_i : i\in I\}$ أسرة من المتراصات في فضاء متري (X,d)

F_i متراصة $i\in I$ $\Leftarrow$ F_i مغلقة $i\in I$

$\Leftarrow$ $\bigcap_{i\in I} F_i$ مغلقة

إذن $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq F_{i_0}$ متراصة

حيث $i_0\in I$

إذن $\bigcap_{i\in I} F_i$ متراصة

حسب المبرهنة

F مغلقة و K متراصة $\Leftarrow$ $K\cap F$ متراصة.

(X,d) فضاء متري

$\tau = \{\theta \subseteq X$: $X\setminus\theta$ متراصة$\} \cup \{\emptyset\}$

τ تبولوجيا على X

الحل:

$\emptyset \in \tau$

$X \in \tau$ لأن $X\setminus X = \emptyset$ متراصة

$\theta_1 , \theta_2 \in \tau \Rightarrow X\setminus\theta_1$ و $X\setminus\theta_2$ متراصتان

$\Rightarrow (X\setminus\theta_1)\cup(X\setminus\theta_2)$ متراصة حسب المبرهنة

بالاعتماد على
القول عن
السؤال السابق

$\Rightarrow X\setminus(\vartheta_1\cap\vartheta_2)$ متراصة

$\Rightarrow \vartheta_1\cap\vartheta_2\in\tau$

$\tau\supseteq\{\vartheta_i : i\in I\} \Rightarrow$ $X\setminus\vartheta_i$ متراصة $\forall i\in I$

إذن حسب السؤال السابق

$X\setminus\left(\bigcup_{i\in I}\vartheta_i\right)=\bigcap_{i\in I}(X\setminus\vartheta_i)$ متراصة

لكن

$\bigcup_{i\in I}\vartheta_i\in\tau$

إذن τ تبولوجيا على X

D مجموعة كثيفة في فضاء متري (X,d) ، U مفتوحة في X

أثبت أن $cl\,U = cl(U\cap D)$

الحل:

بما أن $U\cap D\subseteq U$

إذن $cl(U\cap D)\subseteq cl\,U$ (حسب مسألة سابقة)

بالعكس نفرض $x\in cl\,U$ لنبرهنها

إذن x نقطة ملاصقة لـ U ومنه

$\forall r>0 : N(x,r)\cap U\neq\phi$

من أجل r كيفي (ثابت) يكون $\underset{\text{مفتوح}}{N(x,r)}\cap\underset{\text{مفتوحة فرضاً}}{U}$ غير خالية

ومفتوحة (التقاطع مفتوح)

وليكن $y\in N(x,r)\cap U$

$y \in X = cl\, D$ (D كثيفة)

اذن y نقطة ملاصقة لِ D

و $y \in U \cap N(x,y)$ مفتوحة تحوي y

[illegible] يوجد $\varepsilon > 0$

$N(y,\varepsilon) \subseteq N(x,r) \cap U$ [illegible]

y نقطة ملاصقة لِ D $\Leftarrow$

$\phi \neq N(y,\varepsilon) \cap D \subseteq N(x,r) \cap U \cap D$

إذن بالخلاصة

$\forall r > 0 : N(x,r) \cap (U \cap D) \neq \phi$

إذن x نقطة ملاصقة لِ $U \cap D$ $\Leftarrow$ $x \in cl(U \cap D)$

[illegible]

$f : X \longrightarrow (Y,F)$ تابع معرف على $X \neq \phi$

F تبولوجيا على Y

نفرض

$$\tau = \{ f^{-1}(G) : G \in F \}$$

فإن τ تبولوجيا على X

الحل:

$\phi = f^{-1}(\phi) \in \tau$

$X = f^{-1}(Y) \in \tau$

$O_1 = f^{-1}(G_1)$; $O_2 = f^{-1}(G_2)$

$G_1 ; G_2 \in F$

$\theta_1 \cap \theta_2 = f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2)$

$= f^{-1}(G_1 \cap G_2)$

$G_1 \cap G_2 \in F$ لأن F تبولوجيا

إذن $\theta_1 \cap \theta_2 \in \tau$

$\{\underset{=}{\theta_i} : i \in I\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} \theta_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(G_i)$

$f^{-1}(G_i)$

$= f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right)$

و $\bigcup_{i\in I} G_i \in F$

لأن F تبولوجيا

إذن $\bigcup_{i\in I} \theta_i \in \tau$

إذن τ تبولوجيا على X

$f:(\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/n & x = m/n \in \mathbb{Q} \\ & (m,n)=1 \end{cases}$$

أثبت أن f غير مستمرة في النقط $x \in \mathbb{Q}$

الحل

ليكن $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ سنثبت أن f غير مستمرة في x

$(m,n)=1$ بالاعتماد على

$$x_n \longrightarrow x \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

$$\frac{m}{n} = x \in Q$$

$$Q \not\ni \overset{\text{التالية}}{x_K} = \underset{Q}{x} + \frac{\sqrt{2}}{K} \xrightarrow{\text{تتقارب}} x$$

لو كان f مستمر في x فإن

$$0 = f(x_K) \xrightarrow[K \to +\infty]{} f(x) = 1/n > 0$$

$$\downarrow$$

$$0$$

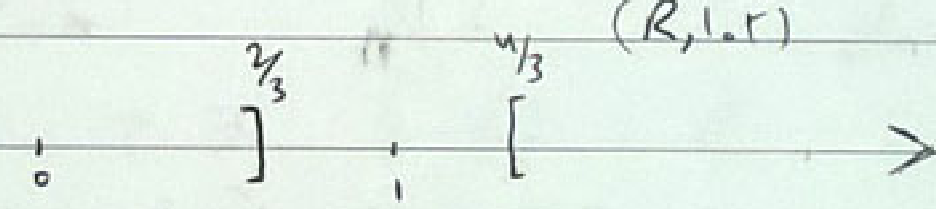
وهذا مستحيل

إذن f غير مستمرة في $x \in Q$

f مستمر $\Longleftrightarrow$ الصورة العكسية لأي مفتوحة في $(R, |.|)$ مفتوحة في المنطلق

لاحظ أن

$$f^{-1}(]2/3, 4/3[) \overset{?}{\notin} \mathbb{Z}$$ غير مفتوح في $(R, |.|)$



$$f^{-1}(]2/3, 4/3[) = \{x \in R : f(x) \in]2/3, 4/3[\}$$

$$= \{x \in R : 2/3 < f(x) < 4/3\}$$

أما إذا كان $x \notin Q \Leftarrow f(x)=0$

$\Leftarrow x \notin f^{-1}(]2/3, 4/3[)$

إذا كان $x \in Q \Leftarrow x = m/n$

$(m,n)=1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{n} < \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} < 2n < 3$

$\Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow x = m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f^{-1}(]2/3, 4/3[) = \mathbb{Z}$

لتكن f دالة حقيقية مستمرة معرفة على فضاء متري X ولتكن

$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$

برهن أن $Z(f)$ مغلقة

الحل: لبرهان أن $Z(f)$ مغلقة

$Z(f)$ مغلقة $\Leftrightarrow$ إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من عناصر $Z(f)$ متقاربة من $x \in X$ فإن $x \in Z(f)$ } مبرهنة

لكن سنعتمد على

$Z(f)$ مغلقة $\Leftrightarrow Z(f) = cl(Z(f))$

نفرض $x \in cl(Z(f))$

سنبين أن $x \in Z(f)$

بما أن x هي نقطة ملاصقة لـ $Z(f)$ إذن توجد متتالية $\{x_n\}$

ناخذ x_n من $Z(f)$ بحيث $x_n \to x$

$$x_n \in Z(f) \Rightarrow \underline{f(x_n)=0}$$

كون f مستمر في $x \in X$ ولدينا

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow \underset{\underset{0}{\|}}{f(x_n)} \longrightarrow f(x)$$

وبالتالي

$$f(x)=0$$

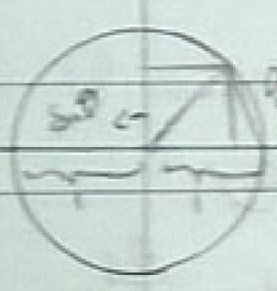
$$\Leftarrow \quad x \in Z(f)$$

إذن $cl(Z(f)) = Z(f)$

إذن $Z(f)$ مغلقة

$$f:(\mathbb{R},|.|) \longrightarrow (\mathbb{R},|.|)$$

$$f(x) = \sin x$$



اثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}$

الحل: ليكن $x \in \mathbb{R}$ مثبتاً

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow \sin x_n \longrightarrow \sin x$$

$$|\sin x_n - \sin x| = \left|2\cos\left(\frac{x_n+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x_n-x}{2}\right)\right|$$

$$= 2\left|\cos\left(\frac{x_n+x}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x_n-x}{2}\right)\right|$$

$$|\cos\theta_1| \leq 1$$

$$|\sin x_n - \sin x| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x_n-x}{2}\right)\right|$$

$$|\sin\theta| \leq |\theta|$$

$$|\sin x_n - \sin x| \le 2\left|\frac{x_n - x}{2}\right|$$

$$0 \le |\sin x_n - \sin x| \le |x_n - x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه

$$|\sin x_n - \sin x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

اذن $\sin x_n \longrightarrow \sin x$

اذن f مستمرة في x من $\mathbb{R}$

$\boxed{Q \text{ غير مترابطة}}$

مثال ع الترابط :

Q غير مترابطة :

توجد A و B مفتوحتين في $(\mathbb{R}, |.|)$

$$Q \subseteq A \cup B$$

$$A \cap B = \phi \text{ و } A \cap Q \ne \phi , B \cap Q \ne \phi$$

$$Q \subseteq \underbrace{]-\infty, \sqrt{2}[}_{= A} \cup \underbrace{]\sqrt{2}, +\infty[}_{= B}$$

$$A \cap B = \phi , A \cap Q \ne \phi \ne B \cap Q$$

(X,d) فضاء مترى ، $A \subseteq X$ ، x_0 نقطة

ملاصقة لـ A

$f:(X,d) \longrightarrow (Y, \ )$ مستمر

أثبت أن $f(x_0)$ ملاصقة لـ $f(A)$

الحل:

f مستمر في x_0 إذاً

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : f(N(x_0,\delta)) \subseteq N(f(x_0),\varepsilon)$$

x_0 نقطة ملاصقة لـ A إذاً

$$\forall r>0 : N(x_0,r) \cap A \neq \phi$$

المطلوب هو إثبات انه

$$\forall l>0 : N(f(x_0),l) \cap f(A) \neq \phi$$

نأخذ $l>0$ كيفي

عندنا f مستمر في x_0

اذاً من اجل l يوجد $\delta>0$ بحيث

$$f(N(x_0,\delta)) \subseteq N(f(x_0),l)$$

كون x_0 ملاصقة لـ A إذاً

$$N(x_0,\delta) \cap A \neq \phi$$

(صحيحة) $\phi \neq f(N(x_0,\delta)\cap A) \subseteq f(N(x_0,\delta)) \subseteq N(f(x_0),l)$

$$\phi \neq f(N(x_0,\delta)\cap A) \subseteq f(A)$$

$$\Rightarrow N(f(x_0),l) \cap f(A) \neq \phi$$

اذاً $f(x_0)$ ملاصقة لـ $f(A)$

اذا كانت H مجموعة جزئية في فضاء متري (X,d) أثبت أن المجموعة

$$G = H \cup (X \setminus H)^\circ$$

كثيفة في X

الحل سنثبت أن كل نقطة x في X ملاصقة لـ G من أجل $r>0$ سنثبت أن

$$N(x,r) \cap G \neq \phi$$

للفرض جدلاً وجود $r>0$ بحيث

$$N(x,r) \cap G = \phi$$ ومنه

$$(N(x,r) \cap H) \cup \underbrace{(N(x,r) \cap (X \setminus H)^\circ)}) = \phi$$

$$\Rightarrow N(x,r) \cap H = \phi \quad \text{و} \quad = \phi$$

$$N(x,r) \subseteq X \setminus H \Rightarrow N(x,r) \subseteq (X \setminus H)^\circ$$

مفتوحة

$$\Rightarrow \phi \neq N(x,r) = N(x,r) \cap (X \setminus H)^\circ = \phi$$

تناقض إذن

$$N(x,r) \cap G \neq \phi \qquad (\forall r>0)$$

إذن x نقطة ملاصقة لـ G $\Leftarrow$ $cl\, G = X$

انتهت .

وهي المحاضرة الأخيرة