١-١٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام تحويلات لابلاس:

إن طريقة تحويلات لابلاس ذات أهمية خاصة في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة مع الشروط الابتدائية المرافقة. وسوف نقوم في هذه الفقرة باستخدام تحويلات لابلاس في حل هذه المعادلات وذلك عن طريق أخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية المفروضة مع الاستفادة من الشروط الابتدائية مستخدمين بذلك قوانين تحويلات لابلاس للمشتقات، فنحصل على معادلة فيها المجهول هي الدالة $F(s)$ حيث نقوم بعزل الدالة المجهولة $F(s)$ في طرف والمقادير الأخرى في الطرف الثاني، ثم نستعمل تحويل لابلاس العكسي للطرفين، فنجد حل هذه المعادلة هو الدالة $f(t)$ مباشرة.

١-١٥- تمارين محلولة:

(أ) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - 2y' + y = 4$$

والتي تحقق الشروط الابتدائية: $y(0) = 4, y'(0) = 2$

الحل:

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة المفروضة:

$$L[y''] - 2L[y'] + L[y] = L[4]$$

نعوض عن كل حد بما يساويه حسب قوانين تحويلات لابلاس:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=\frac{4}{s}$$

حيث $L[y(t)]=Y(s)$ بالاستفادة من الشروط الابتدائية المعطاة:

$$s^2Y(s)-4s-2-2sY(s)+8+Y(s)=\frac{4}{s}$$

أو

$$Y(s)[s^2-2s+1]=4s-6+\frac{4}{s}$$

$$Y(s)=\frac{4s^2-6s+4}{s(s^2-2s+1)}=\frac{2(2s^2-3s+2)}{s(s-1)^2}$$

وبتفريق الكسر إلى كسوره البسيطة نجد:

$$Y(s)=\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{4}{s}$$

لنأخذ الآن تحويل لابلاس العكسي للطرفين:

$$L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2}]+L^{-1}[\frac{4}{s}]$$

أي أن: $y(t)=2te^t+4$

وهو المطلوب.

(ب) استخدم تحويلات لابلاس في حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(4)}+2y''+y=\sin t$$

والتي تحقق الشروط الابتدائية:

$$y(0)=1; y'(0)=-2; y''(0)=3; y'''(0)=0$$

الحل:

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية المعطاة واستخدام الشروط الابتدائية نحصل على:

$$[s^4Y(s)-s^3(1)-s^2(-2)-s(3)-0]+2[s^2Y(s)-s(1)-(-2)]+$$
$$+Y(s)=\frac{1}{1+s^2}$$

وهذه يمكن كتابتها في الشكل:

$$(s^4+2s^2+1)Y(s)=\frac{1}{s^2+1}+s^3-2s^2+5s-4$$

أو:

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)^3}+\frac{s^3-2s^2+5s-4}{(s^2+1)^3}$$
$$=\frac{1}{(s^2+1)^3}+\frac{(s^3+s)-2(s^2+1)+4s-2}{(s^2+1)^2}$$
$$=\frac{1}{(s^2+1)^3}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}+\frac{4s-2}{(s^2+1)^3}$$

والآن باستخدام النظريات الخاصة بتحويلات لابلاس:

$$L^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^3}]=\frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{1}{8}t^2\sin t$$

$$L^{-1}[\frac{4s-2}{(s^2+1)^3}]=2t\sin t-\sin t+t\cos t$$

بالتالي فإن الحل المطلوب هو:

$$y(t)=(1+\frac{5}{8}t)\cos t-(\frac{21}{8}-2t+\frac{1}{8}t^2)\sin t$$

١٧– تمارين غير محلولة:

٧) حل المعادلات التفاضلية التالية باستعمال تحويلات لابلاس:

(١) $y'' + 5y' - y = te^{-t} \;;\; y(0) = y'(0) = 1$

(٢) $y'' + y = 1 \;;\; y(0) = 1; y'(0) = 0$

(٣) $y'' + 16y = 32t \;;\; y(0) = 3; y'(0) = -2$

(٤) $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2t} \;;\; y(0) = -2; y'(0) = -8$

(٥) $y'' + 2y' + 2y = \sin t \;;\; y(0) = 1; y'(0) = 0$

(٦) $y''' - 9y'' + 24y' - 16y = 0; y(0) = 0; y'(0) = -11; y''(0) \quad 61$

(٧) $y''' + 8y = 32t^3 - 16t \;;\; y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

(٨) $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0 \;;\; y(0) = y''(0) = 2; y'(0) = 1$

★★★★★★★★★★★★★★