الأربعاء: 2014/5/27

المحاضرة العشرون:

حل تمارين:

$\frac{4}{183}$ أثبت أن 2 هو جذر أولي للعدد 19 وأنه ليس جذراً أولياً للعدد 17؟

الحل:

$2^{18} \overset{?}{\equiv} 1 \pmod{19}$ ، $\varphi(19) = 18$

لدينا:

$$\varphi(19) = 18 \Rightarrow \varphi(\varphi(19)) = \varphi(18) = \varphi(2 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 6$$

رتبة العدد 2 بالمقاس 19 أحد عناصر مجموعة قواسم العدد $\varphi(19) = 18$

وهي: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$2^2 \equiv 4 \pmod{19}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{19}$

$2^6 \equiv 7 \pmod{19}$, $2^9 \equiv 18 \equiv -1 \pmod{19}$

$2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$

2 جذر أولي للعدد 19.

طلب إضافي:

عدد جذور العدد 19 هي 6، أوجد هذه الجذور:

نبحث عن العدد 2^k ; $(k, \varphi(19)) = 1$

$(k, 18) = 1 \Rightarrow k = 1, 5, 7, 11, 13, 17$

$2^5 \equiv 13 \Rightarrow$ 13 جذر أولي لـ 19

$2^7 \equiv 14 \Rightarrow$ 14 جذر أولي لـ 19

$2^{11} \equiv 15 \Rightarrow$ 15 جذر أولي لـ 19

$2^{13} \equiv 3 \Rightarrow$ 3 ,, ,, ,,

$2^{17} \equiv 10 \Rightarrow$ 10 ,, ,, ,,

$n=17$, $\phi(17)=16$

قواسم العدد 16 هي $\{1,2,4,8,16\}$

$2^4 \equiv 16 \pmod{17}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{17}$

$2^8 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{17}$

$\phi(17) > 8$ وبالتالي 2 ليس جذراً أولياً للعدد 17.

[5/183] أثبت أنه لا يوجد للعدد 15 أي جذر أولي:

الحل:

15 هو ليس من الشكل $m=2p^n$

وليس من الشكل $m=p^n$

[6/183] أوجد الجذرين الأوليين للعدد 10

الحل:

لدينا $m=2.5$

$\phi(10)=\phi(2\times5)=2\times5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=4$

$T(10)=\{1,3,7,9\}$

$3^4\equiv 1 \pmod{10}$, $3^3\equiv 7 \pmod{10}$, $3^2\equiv 9 \pmod{10}$

3 جذر أولي للعدد 10 نبحث عن الجذور الأولية من الشكل 3^k بحيث يكون

$(k,\phi(10))=1 \Leftarrow (k,4)=1$ $k=1,3$

$3^3 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$

والجذور الأولية هي 3, 7

[7/183] أوجد جميع الجذور الأولية للعدد 17 علماً أن 3 هو جذر أولي له.

الحل: الجذور هي: 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14

تمارين صفحة 164 :

$\frac{4}{164}$) أثبت أن أس أكبر قوة للعدد 5 تقسم $(5^n-4)!$ هي: $\frac{5^n-4n-1}{4}$

الحل:

بالاستقراء نجد

$$m = 5^n - 4 = 4.5^{n-1} + 5.4^{n-2} + \dots + 4.5 + 1$$

$$H_5\left((5^n-4)!\right) = \left[\frac{5^n-4}{5}\right] + \left[\frac{5^n-4}{5^2}\right] + \dots + \left[\frac{5^n-4}{5^{n-1}}\right] + \left[\frac{5^n-4}{5^n}\right]$$

$$= \left[5^{n-1} - \frac{4}{5}\right] + \left[5^{n-2} - \frac{4}{25}\right] + \dots + \left[5 - \frac{4}{5^{n-1}}\right] + \left[1 - \frac{4}{5^n}\right]$$

$$= 5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5 + 1 \underbrace{-1 - \dots - 1}_{\text{عددها } n}$$

وذلك حسب $[a+a] = a + [a]$

$$= \frac{5^n-1}{4} - n = \frac{5^n-1-4n}{4}$$

$\frac{6}{164}$) أوجد أس أكبر قوة للعدد 7 تقسم $2400!$ ؟

الحل:

$$H_7(2400!) = \left[\frac{2400}{7}\right] + \left[\frac{2400}{7^2}\right] + \left[\frac{2400}{7^3}\right] + \left[\frac{2400}{7^4}\right]$$

$$= 342 + 48 + 6 = 396$$

$7^2 = 49$ $\quad$ $7^3 = 343$ $\quad$ $7^4 = 2401$

$\frac{11}{165}$] إذا كان $(a,30)=1$ أثبت أن: $240 \mid a^4 - 1$

الحل:

$(a,2)=(a,3)=(a,5)=1$

$(a,2)=1 \Rightarrow a^1\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow a^4\equiv 1\pmod 2$

$;\ 240=3\times 5\times 16$

$2^{2^n}\equiv 1\pmod{2^{n+2}}$

إذا كان:

$a\equiv b\pmod{p^r}$ فإنّ:

$a^{p^s}\equiv b^{p^s}\pmod{p^{r+s}}$

ومنه

$a^{2^2}\equiv 1\pmod{2^{3+1}}$

$a^4\equiv 1\pmod{16} \Rightarrow 16\mid a^4-1$

$(a,3)=1 \Rightarrow a^2\equiv 1\pmod 3 \Rightarrow a^4\equiv 1\pmod 3 \Rightarrow 3\mid a^4-1$

$(a,5)=1 \Rightarrow a^4\equiv 1\pmod 5 \Rightarrow 5\mid a^4-1$

أولية مثنى مثنى $(3,16,5)=1 \Rightarrow 3\times 5\times 16\mid a^4-1$

$\frac{13}{165}$ إذا كان a عدداً فردياً، $(a,3)=1$

أثبت أن: $192\mid f(a)=a^4+14a^2-96a+81$

فكرة الحل:

$f(a)=(a^2+7)^2-32(3a-1)$

$192=2^6\times 3$

$\frac{14}{165}$ أثبت أن $\tau(n)$ يكون عدداً فردياً إذا وفقط إذا كان n مربعاً كاملاً.

الحل

$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r} \Rightarrow \tau(n)=(a_1+1)$

$(a_2+1)\cdots(a_r+1)$ عدد فردي

أي أن (a_i+1) هو عدد فردي؛ a_i عدد زوجي

$a_i=2k_i \quad ; \quad 1\le i\le r$

/ /

$$n = p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \cdots p_r^{2k_r} = m^2$$

22/166) إذا كان n عدداً كاملاً أثبت أن: $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$

الحل:

n عدد كامل $\Leftrightarrow \sum_{d|n} d = 2n$

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2n$$

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$$

25/166) أثبت أن $a^{33} \equiv a \pmod{4080}$

الحل

$(a,m)=1$ ، a عدد صحيح فردي:

$$4080 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$$

$a^2 \equiv 1 \pmod{2^3} \Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{2^4}$

$a^{33} \equiv (a^4)^8 a \equiv a \pmod{2^4} \Rightarrow 2^4 | a^{33} - a$

$(a,3)=1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$a^{33} \equiv (a^2)^{16} \cdot a \equiv a \pmod{33} \Rightarrow 3 | a^{33} - a$

$(a,5)=1 \Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{5}$

$a^{33} \equiv (a^4)^8 \cdot a \equiv a \pmod{5} \Rightarrow 5 | a^{33} - a$

$(a,7)=1 \Rightarrow a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

$$a^{33} \equiv (a^{16})^2 \cdot a \equiv a \pmod{17} \Rightarrow 17 \mid a^{33} - a$$

أولية مثنى مثنى $3, 2^4, 5, 17$

$$\Rightarrow 2^4 \times 3 \times 5 \times 17 \mid a^{33} - a$$

$$\Rightarrow a^{33} \equiv a \pmod{4080}$$

أثبت أيضاً بنفس الطريقة:

$$a^{37} \equiv a \pmod{1729} \qquad 1729 = 7 \times 13 \times 19$$

$$a^{13} \equiv a \pmod{2730} \qquad 2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

$\frac{9}{165}$ إذا كان $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ حيث $p_1, p_2, \ldots, p_r$ أوليات مختلفة

وإذا كانت الدالة f ضربية أثبت أن:

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r))$$

الحل:

نفرض $n = p^a$

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) f(d) = \mu(1) f(1) + \mu(p) f(p) + \mu(p^2) f(p^2) + \cdots$$

$$\cdots + \mu(p^a) f(p^a) = 1 - f(p)$$

فإن

$$\sum_{d \mid \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}} \mu(d) f(d) = \prod_{i=1}^{r} \Big(\sum_{d \mid p_i^{a_i}} \mu(d_i) f(d) \Big)$$

$$= (1 - f(p_1))(1 - f(p_2)) \cdots (1 - f(p_r))$$

انتهى المقرر ..

نسأل الله التوفيق ....