- احسب طول المنحني $\rho = a(1+\sin\theta)$

مسائل في الكيناتيك (1)

مثال (1): نقطة مادية M تتحرك على مستوٍ AB يميل على الأفق بزاوية قدرها α بسرعة نسبية قيمتها $v_r=\sqrt{2gy}$ ، حيث g ثابت، y ترتيب النقطة على المحور y المتجه نحو الأسفل. المستوي AB يتحرك على أرض أفقية ويحقق حركة M عليه بسرعة ثابتة v_e. جد المسار المطلق للنقطة M وكذلك السرعة المطلقة لحظة تماس هذه النقطة مع الأرض، مع العلم أن النقطة M كانت لحظة البدء على ارتفاع h عن الأرض.

الحل: نأخذ جملة احداثية ديكارتية x, y مبدؤها في موضع النقطة M لحظة البدء، فيها المحور x أفقي و y شاقولي ~~[illegible]~~ هابط.

الحركة المستوي AB تؤخذ كحركة جرية وحركة M بالنسبة لهذا المستوي ~~[illegible]~~ نسبية. إن مركبتي السرعة ~~[illegible]~~ الحركة المطلقة للنقطة M على المحورين تتحدد بالصيغ التالية:

$$v_x = v_e + v_r\cos\alpha, \quad v_y = v_r\sin\alpha$$

نعوض قيمة v_r من نص المسألة ونعوض $v_x=\frac{dx}{dt}$ ، $v_y=\frac{dy}{dt}$ في هاتين المعادلتين:

$$\frac{dx}{dt} = v_e + \sqrt{2gy}\cos\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}\sin\alpha$$

بتقسيم هاتين المعادلتين على بعضهما ونعوض المعطيات والمعادلة 2 نجد:

$$dx = ctg\alpha\, dy + \frac{v_e}{\sqrt{2g}\sin\alpha}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

بمكاملة هذه المعادلة التفاضلية ضمن حدود من 0 إلى x بالنسبة للطرف الأيسر ومن 0 إلى y للطرف الأيمن (لأن الحركة بدأت من مبدأ الاحداثيات) نحصل لدينا

$$x = ctg\, y + \frac{2v_0}{\sqrt{2g}\sin\alpha}\sqrt{y}$$

بالتربيع ونعوض 2 نجد:

$$(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = \frac{2v_0^2}{g}y$$

وهي معادلة قطع مكافئ، المسار المطلق للنقطة M. ومن أجل الحصول على السرعة المطلقة للنقطة لحظة تماسها مع الأرض نعوض في 1 ، 2 $y=h$ ونعوض بالعبارة السابقة للعلم:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_e^2 + 2gh + 2v_e\sqrt{2gh}\cos\alpha$$

مثال (٢)

تتحرك نقطة وفق المعادلتين:

$$x = e^t \cos t \quad , \quad y = e^t \sin t$$

أوجد معادلة مسار هذه النقطة وسرعتها ثم عجلتها المماسية والناظمية ثم استنتج نصف قطر تقوس المسار.

الحل: لإيجاد المسار نتخلص من t من معادلتي الحركة

$$x^2+y^2 = e^{2t}$$

بقسمة المعادلتين على بعضهما نجد

$$\frac{x}{y} = tg\, t = tg\, \theta$$

وهنا وضعنا $t=\theta$ لسهولة التعامل مع الإحداثيات القطبية وهو أمر مهم. بمعرفة أن $x^2+y^2=r^2$ تكون معادلة المسار تأخذ الشكل $r=e^\theta$

سرعة نقطة على المسار نوجدها بمركبتيها على المحاور الإحداثية x و y:

$$x' = v_x = e^t \cos t - e^t \sin t$$

$$y' = v_y = e^t \sin t + e^t \cos t$$

أما مقدار السرعة:

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{e^{2t}+e^{2t}} = \sqrt{2}\, e^t$$

أما عجلة النقطة فنعطي كذلك بمركبتيها x و y وهذا يعني استخدام مشتقة السرعة

$$w = \sqrt{x''^2+y''^2}$$

والحل من أجل ...

$= e^t$

C_n^2 بأن:

$4e^{2t} - 2e^{2t} = 2e^{2t}$

ومنه

ومعلوم أن ... وكذلك

مماسيات ...

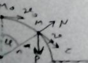
نصف قطر التقوس

ومنه،

$$\frac{e^{2t}}{\sqrt{2}\, e^t} = \sqrt{2}\, e^t$$

مثال (٣):

أعطيت كرة صغيرة في ذروة سطح كروي سرعة ابتدائية أفقية



أوجد ... تنفصل الكرة عن ... الطبقة؟

وهنا وضعنا $t=\theta$ لدوال الاحداثيات القطبية
وهو الحل . بعد فقط أن $x^2+y^2=r^2$
ثم أن معادلة المسار تأخذ الشكل $r=e^\theta$ ،
سرعة نقطة على المسار وقيمتها بمركبتيها على المحاور
الاحداثية x و y :

$$x' = v_x = e^t\cos t - e^t\sin t$$
$$y' = v_y = e^t\sin t + e^t\cos t$$

اما قيمتها فتساوي :

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{e^{2t}+e^{2t}} = \sqrt{2}\,e^t$$

اما رسم الكلي للنقطة فهو كذلك بمركبتيه
x و y وطبعا يلزم اشتقاق مركبات السرعة

$$\Gamma = \sqrt{x''^2+y''^2}$$

ولكن من الحل الا قسمه على حفظ ان:

$$x' = x-y \ , \quad y' = y+x$$

واشتقاق هذه العلاقة هو بالنسبة للزمن

$$x'' = x'-y' \ , \quad y'' = x'+y'$$

نجد

$$\Gamma = \sqrt{x''^2+y''^2} = \sqrt{(x'-y')^2+(y'+x')^2}$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{2}\,v$$

e^t

مثال ٣

اعملية

حركة

الحل: تتحرك

تحت تأثير

أ. نوجد نصف قطر التقوس للمنحنى:

$$v = 2e^t$$

التسارع المماسي: $\gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \sqrt{2}\, e^t$

بأن: $\gamma^2 = \gamma_\tau^2 + \gamma_n^2$ إذن التسارع الناظمي

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_\tau^2 = 4e^{2t} - 2e^{2t} = 2e^{2t}$$

ومنه

$$\gamma_n = \sqrt{2}\, e^t$$

نلاحظ أن مركبتي التسارع الناظمية والمماسية متساويتان في هذا المثال.

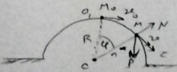
ونصف قطر التقوس، لدينا: $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$

ومنه:

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{2}\, e^t} = \sqrt{2}\, e^t$$

مثال (٣):

أعطيت كرة صغيرة، كتلتها m موجودة في ذروة سطح كروي أملس نصف قطره R سرعة ابتدائية أفقية مقدارها v_0.



$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}\, s$$

(2)

$$x = e^t \cos t$$

$$x^2 + y^2 = e^{2t}$$

$$\frac{x}{y} = tg\, t$$

$$x' = v_x = e^t \cos t -$$

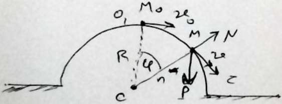
$$y' = v_y = e^t \sin t +$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{e^{2t} + e^{2t}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{r_n} = \frac{2e^t}{\sqrt{2}e^t} = \sqrt{2}\, e^t$$

مثال (3):

أعطيت كرة صغيرة، كتلتها m، موجودة
في ذروة سطح كروي أملس نصف قطره R
سرعة ابتدائية أفقية مقدارها v_0 ،



في أي مكان تنفصل الكرة عن السطح لتبدأ
حركتها الطليقة؟.

الحل: تتحرك الكرة على السطح الكروي الأملس
تحت تأثير قوتين: $\vec{P}$ قوة الثقالة،
و رد فعل السطح $\vec{N}$.

(3)

تأخذ المعادلة التفاضلية للكرة الصغيرة في هذه الحالة الشكل الآتي:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} \quad (1)$$

ومن الصيغ:

$$m\frac{dv}{dt} = F_t$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N$$

تكون معادلات الحركة:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= P\sin\varphi \\ m\frac{v^2}{\rho} &= P\cos\varphi - N \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

حيث φ الزاوية التي يصنعها OM مع المحور Oz اعتبارا من M_0.

تنفصل الكرة عن السطح عندما ينعدم ضغطها على السطح، أي من المعادلة الثانية ووضع $N=0$ نجد:

$$m\frac{v^2}{\rho} = P\cos\varphi$$

مع ملاحظة أن $\rho = R$ و $P = mg$ نجد أن الزاوية φ تتحدد بالمعادلة التالية:

$$\cos\varphi = \frac{v^2}{gR} \quad (3)$$

هذه المعادلة تحدد لنا قيمة الزاوية φ

تنفصل الكرة

السطح ، إذن فمن المعادلة الثانية ونعوض

$r = 0$ نجد

$$m\frac{v^2}{\rho} = P\cos\varphi$$

بملاحظة أن $\rho = R$ و $P = mg$ نجد أن

الزاوية φ تحدد بالمعادلة التالية :

$$\cos\varphi = \frac{v^2}{gR} \qquad (3)$$

هذه المعادلة تحدد لنا قيمة الزاوية φ

التي عندها تنفصل الكرة m عن السطح

الكروي ، مع الأخذ بعين الاعتبار أن

السرعة v تم إيجادها سابقاً من

هذه المعادلة لقانون الحفظ .

للتعرف على السرعة V نستعمل
المعادلة (2). لنأخذ موضع
النقطة لحظة البدء M_0 كبداية للفواصل
على المسار s (الفاصلة المنحنية)
ومنه الدالة $v = \frac{ds}{dt}$

إذن:

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = mR\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$= mR\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

نضع $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ (السرعة الزاوية) فيكون:

$$m\frac{dv}{dt} = mR\frac{d\omega}{dt} = mR\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= mR\omega\frac{d\omega}{d\varphi}$$

إذن المعادلة السابقة تكتب:

$$\cancel{m}R\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \cancel{m}g\sin\varphi$$

$$R\omega\, d\omega = g\sin\varphi\, d\varphi$$

بالمكاملة:

$$R\frac{\omega^2}{2} = -g\cos\varphi + C$$

لكن $R\omega = v$ إذن:

(3)

...بية للكرة الصغيرة

...لاساسي:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}...$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = F_t$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_{in} + ...$$

$$m\frac{dv}{dt} = P\sin\varphi$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = P\cos\varphi - ...$$

... φ_0 on ...

... المعادلة الثانية ...

$$m\frac{v^2}{\rho} = P\cos\varphi ...$$

... $P = mg$ ...

... المعادلة الأم ...

$$\cos\varphi = ...$$

...

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2} = mR\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$= mR\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

[illegible] $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$

$$m\frac{dv}{dt} = mR\frac{d\omega}{dt} = mR\frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= mR\omega\frac{d\omega}{d\varphi}$$

[illegible]

$$\cancel{m}R\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \cancel{m}g\sin\varphi$$

$$R\omega\, d\omega = g\sin\varphi \cdot d\varphi$$

بالتكامل

$$R\frac{\omega^2}{2} = -g\cos\varphi + C$$

بوضع $R\omega = v$ [illegible]

$$\frac{V^2}{2R} = -g\cos\varphi + C$$

$$t = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0,\ v = v_0$$

$$C = \frac{2v_0^2}{2R} + g$$

$$V^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi)$$

$$m\frac{dv}{dt} = g\sin\varphi$$

$$m\frac{v^2}{r} = P\cos\varphi - \ldots$$

[illegible]

$$m\frac{v^2}{r} = P\cos\varphi$$

$P = mg$ [illegible]

$$\cos\varphi = \frac{v^2}{gR}$$

[illegible]

[illegible] ③ [illegible]

(4)

نضع قيمة v^2 في المعادلة (3) نجد:

$$\cos\varphi = \frac{v_0^2}{gR} + 2(1-\cos\varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{v_0^2}{gR}\right) \quad (4)$$

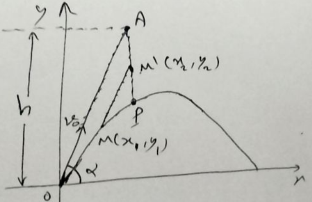
هذه المعادلة تحدد لنا قيمة الزاوية φ التي تنفصل عندها الكرة عن سطح العلاق اشارنا لها أصغرنا.

مثال (٤):

في مستوٍ شاقولي xOy توجد نقطة A معرفة بترتيبها h وبزاويتها $\hat{AOx}=\alpha$ و M نقطة مادية كتلتها m. في لحظة واحدة قذفت النقطة M من O وفق OA بسرعة ابتدائية v_0، ثم تركت نقطة مادية أخرى M' كتلتها m' تسقط بدون سرعة ابتدائية من A. برهن أن المتحركين يتلاقيان في نقطة واحدة معينة؟ وأن المستقيم MM' يبقى موازياً لمستقيم مفروض؟ احسب طول هذا المستقيم بدلالة الزمن.

مثال (٤):

في مستوٍ شاقولي xOy توجد نقطة A معرفة بترتيبها h وبالزاوية $\hat{AOx}=\alpha$ ، M نقطة مادية كتلتها m . في لحظة واحدة قذفت النقطة M من O نحو OA بسرعة ابتدائية v_0 ، ثم تركت نقطة مادية أخرى M' كتلتها m' تسقط بدون سرعة ابتدائية من A . برهن أن المتحركين يلاقيان في نقطة واحدة هي P وأن المستقيم MM' يبقى موازياً لمستقيم ثابت ؟ احسب طول هذا المستقيم بدلالة الزمن.



$V^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi)$.

حسب الدراسة النظرية في ...
معادلة حركة m ... :

$x_1 = v_0 t\cos\alpha,\quad y_1 = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$

اما معادلات النقطة M فهي :

$x_2 = h\,ctg\alpha,\quad y_2 = h - \frac{1}{2}gt^2$

وزمن أن تصل النقطة ... $t = \frac{h}{v_0\sin\alpha}$

ما جهة وترتيب كل من المركبتين ...
... أما ميل المستقيم MM_1 يبقى موازياً لمستقيم ثابت
...

$$\mu = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{h-v_0 t\sin\alpha}{h\,ctg\alpha - v_0 t\cos\alpha}$$

$$= tg\,\alpha$$

فهذه العلاقة تثبت أن المستقيم MM_1 يبقى موازياً لمستقيم ثابت هو OA،
الطول ... الطول ...

$$\overline{MM_1} = \left|\frac{x_2-x_1}{\cos\alpha}\right| = \left|\frac{h}{\sin\alpha} - v_0 t\right|$$

(4)

... (3) ...

$\cos\varphi = \frac{v_0^2}{gR} ...$

$\cos\varphi = \frac{1}{3}(2 + ...$

... قيمة الزاوية ...

... أكبر ...

... أصبح ...

... نقطة A ...

... $\hat{AOx} = \alpha$ ...

... واحدة ...

... OA ... الابتدائية

... M^1 ...

... الابتدائية

أن المركبتين ...

... MM^1 ...

...

... الزمن.

A

مثال: توضع حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري أفقي نصف قطره a أعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية u_0 في اتجاه المماس. فإذا كان μ معامل الاحتكاك بين الحلقة والسلك. عين المسافة التي تقطعها الحلقة حتى تتوقف.

الحل

نأخذ مبدأ القياس من موضع الحلقة لحظة البدء. القوى المؤثرة على الحلقة هي: المقاومة R_τ، تعمل في عكس اتجاه الحركة ورد الفعل الأفقي R_n العمودي ورد الفعل السري الرأسي ناتج (nb) ووزنها قوة الثقالة $P = mg$.

في هذه الحالة تأخذ المعادلات الذاتية لحركة الحلقة

$$m\frac{du}{dt} = -R_\tau \,,\quad m\frac{u^2}{\rho} = R_n$$

$$0 = R_b - P$$

نأخذ مبدأ الإحداثيات موضع الحلقة
لحظة البدء، المحور الأفقي
مع المنحنى هو المماس R_τ ،
عمودياً على المنحنى باتجاه الحركة ورده
الفعل الناظمي R_n والعمودي
المستوي الناظم (nb) ونأخذ
قوة الثقالة
$P = mg$.

في هذه الحالة تأخذ المعادلات التالية
لحركة الحلقة ،

$$m\frac{dv}{dt} = -R_\tau \,,\quad m\frac{v^2}{\rho} = R_n$$

$$0 = R_b - P$$

حيث ،

$$R_\tau = f\,|R_N| = f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}$$

$$R_b = P = mg$$

$$R_z = mf\sqrt{\frac{v^4}{a^2}+g^2} =$$

$$= \frac{mf}{a}\sqrt{v^4+a^2g^2}$$

حيث ان نصف قطر التقوس عند x

من أجل إيجاد المسافة التي تقطعها الكتلة حتى تتوقف نضع العلاقة السابقة بدلالة الاحداثيات

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{f}{a}\sqrt{a^2g^2+v^4}$$

بفصل المتحولات

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv^2}{\sqrt{a^2g^2+v^4}} = -\frac{2f}{a}\int_0^s ds$$

ومنه

$$s = \frac{a}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v_0^4}}{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v^4}}$$

... الأولى ... الحركة ...

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{f}{a}\sqrt{a^2g^2+v^4}$$

بفصل المتغيرات ،

$$\int_{v_0}^{v}\frac{d v^2}{\sqrt{a^2g^2+v^4}} = -\frac{2f}{a}\int_0^s ds$$

ومنه

$$s = \frac{a}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v_0^4}}{v^2+\sqrt{a^2g^2+v^4}}$$

لحظة توقف الكتلة عن الحركة

يكون لدينا $v=0$ ومباشرة نجد

أن المسافة المطلوبة تساوي ،

$$s^* = \frac{a}{2f}\ln\frac{v_0^2+\sqrt{a^2g^2+v_0^4}}{ag}$$

... مع ... الكتلة

... الكرة

... المماس R_τ ،

... الكرة ...

... R_n العمودي ...

... (nb) وذاتي ...

$P = mg$.

... ثانية ... الكتلة ...

، ...

$$m\frac{dv}{dt} = -R_\tau ,\ m ...$$

$$0 = R_b - P$$

$$R_\tau = f|R_n| = f\sqrt{R_n^2+ ...}$$

$$R_b = P = mg$$