...-١١-١- تمارين محلولة:

...بيق طريقة شارب لإيجاد تكاملات تامة للمعادلات التالية:

$$2xz - px^2 - 2qxy + pq = 0 \qquad (١)$$

الحل:

نأخذ الطرف الأيسر في المعادلة (١) على أنه الدالة f ونعوض في الجملة

المساعدة (٥٤) فنجد:

$$\frac{dx}{x^2 - q} = \frac{dy}{2xy - p} = \frac{dz}{px^2 + 2xyq - 2pq} =$$

$$=\frac{dp}{2z-2qy}=\frac{dq}{0}=\frac{dg}{0}$$

ومن النسبة ما قبل الأخيرة نجد أن $q=a$ تكامل أولي للجملة المساعدة.

من المعادلة الأخيرة والمعادلة المعطاة نحسب p فنجد:

$$p=2x\frac{z-ay}{x^2-a}$$

ويكون:

$$dz=pdx+qdy=2x\frac{z-ay}{x^2-a}dx+ady$$

أي أن:

$$\frac{dz-ady}{z-ay}=\frac{2xdx}{x^2-a}$$

بالمكاملة نحصل على: $z=ay+b(x^2-a)$

وهو تكامل تام للمعادلة المفروضة.

لإيجاد التكامل الشاذ للمعادلة نحذف a,b بين التكامل التام والمعادلتين:

$$y-b=0 \quad , \quad x^2-a=0$$

والناتجتين منه بالاشتقاق الجزئي بالنسبة إلى a,b على الترتيب وبنتيجة الحذف نجد التكامل الشاذ $z=yx^2$.

$$2z+p^2+qy+2y^2=0 \qquad (٢)$$

الحل:

إن الجملة المساعدة هي:

$$\frac{dx}{-2p}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{-2p^2-qy}=\frac{dp}{2p}=\frac{dq}{2q+4y}=\frac{dg}{0}$$

ومن النسبتين الثانية والرابعة نجد التكامل الأولي: $a \quad py^2=a$.

وبالاستفادة من النتيجة الأخيرة والمعادلة الأصلية نجد:

$$dz = pdx + qdy = \frac{a}{y^2}dx - (\frac{2z}{y} + \frac{a^2}{y^3} + 2y)dy$$

$$y^2 dz + 2yzdy = adx - (\frac{a^2}{y^3} + 2y^3)dy$$

أي أن:

بالمكاملة نجد:

$$y^2 z = ax + \frac{a^2}{2}\frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}y^4 + b$$

أو خذ النسبتين الأولى والرابعة لتجد تكاملاً تاماً آخر:

$$y^2[(x+a)^2 + y^2 + 2z] = b$$

(٣) $yzp^2 = q$

الحل:

الجملة المساعدة هي:

$$\frac{dx}{-2pyz} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2p^2yz + q} = \frac{dp}{yp^3} = \frac{dq}{zp^2 + qyp^2} = \frac{dg}{0}$$

بتعويض q من المعادلة المعطاة في النسبة الثالثة نجد:

$$\frac{dz}{-p^2yz} = \frac{dp}{yp^2}$$

أي أن:

$$\frac{dz}{z} + \frac{dp}{p} = 0$$

بالمكاملة نحصل على: $zp = a$

ومن هذا التكامل الأولى والمعادلة الأصلية نجد: $q = \frac{a^2 y}{z}$

وبالتالي: $dz = pdx + qdy = \frac{a}{z}dx + \frac{a^2 y}{z}dy$

بالمكاملة نجد: $z^2 = 2ax + a^2y^2 + b$