الخميس ٩/٤/٢٠١٥م

المحاضرة التاسعة

تطبيقات الدالة ذات التغير المحدود

من اهم التطبيقات على الدالة ذات التغير المحدود على مجال مغلق :

- المنحني المجمع القابل للتجميع.

تعريف المنحني القابل للتجميع :

$\boxed{1}$ - إذا كان لدينا المنحني k المعرف وسيطاً $x=x(t)$ ، $y=y(t)$

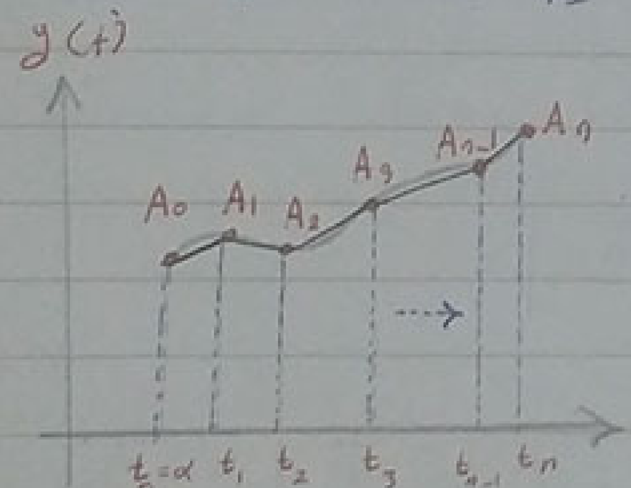
$\boxed{2}$ - وكان كلاً من $x(t)$ ، $y(t)$ مستمرين على مجال $[\alpha,\beta]$

$\boxed{3}$ - وكان المنحني k لا يحوي نقاط مضاعفة (باستثناء البداية والنهاية في حالة كون المنحني مغلقاً).

$\boxed{4}$ - لتكن P تجزئة للمجال $[\alpha,\beta]$ $\quad P=\{\alpha=t_0<t_1<\dots<t_n=\beta\}$

$\boxed{5}$ - عندئذٍ تقابل هذه التجزئة نقاطاً على المنحني k نسميها $A_0, A_2, \dots, A_n$

$\boxed{6}$ - نصل بين النقاط $A_0, \dots, A_n$ بقطع مستقيمة



عندئذٍ نحصل على طول الخط المنكسر من A_0 إلى A_n ومعرفاً بالقانون

$$l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

وهكذا

$\boxed{7}$ ومن اجل كل تجزئة P نحصل على $l(P)$ جديد ولنأخذ :

$$l=\sup_{P\in\mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(P)$$

إذا كان $l<\infty$ عندئذٍ نقول ان k منحني قابل للتجميع وطوله l

مبرهنة جوردن :

الشرط اللازم والكافي ليكون المنحني k قابل للتجميع هو أن تكون كلاً من الدالتين $x(t)$ ، $y(t)$ دوال ذات تغير محدود على المجال $[\alpha,\beta]$

البرهان :

لزوم الشرط

نعلم ان $\forall a,b\in\mathbb{R}$

$$|a|\le\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$$
$$|b|\le\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|$$

لنبرهن أن $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على $[\alpha,\beta]$ وبشكل مشابه نبرهن ان $y(t)$ دالة ذات تغير محدود على $[\alpha,\beta]$.

لدينا

$$\underbrace{|x(t_k)-x(t_{k-1})|}_{|a|} \leq \sqrt{\underbrace{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2}_{a^2}+\underbrace{(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}_{b^2}}$$

للتوضيح

نجمع من $k=1$ إلى n فنجد:

$$\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{P}\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})| \leq \sup_{P}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k+1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$$

ولكن $+\infty > \ell = \sup_{P}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}$

كون المنحني k المعرف وسيطياً بـ $x(t)$ و $y(t)$ منحني قابل للتمهيد.

$$\Rightarrow \overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}\, x(t) \leq \ell < +\infty$$ $\Rightarrow$ $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على $[\alpha,\beta]$

وبنفس الطريقة نجد ان $y(t)$ دالة ذات تغير محدود على $[\alpha,\beta]$.

كفاية الشرط:

$$\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2} \leq$$

$$\leq |x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

نجمع من $k=1$ إلى n:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2} \leq \sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

$$\underbrace{\sup_{P}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}}_{\ell=\sup_{P}\ell(P)} \leq \underbrace{\sup_{P}\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|}_{<+\infty}+\underbrace{|y(t_k)-y(t_{k-1})|}_{<+\infty}$$

$\sup_{P}\sum_{k=1}^{n}$

$$\Rightarrow \quad l = \sup_{P} L(P) < +\infty$$

وبالتالي فإن k منحني مقوم (قابل للتقويم) على $[\alpha, \beta]$.

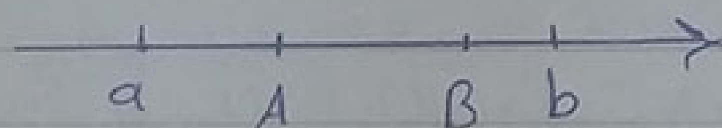
ملاحظة: يمكن تعميم مبرهنة جوردن على منحني في $\mathbb{R}^n$.

مبرهنة ليبشتز /الشرط الثالث/: «للمحاضرة السابقة»

إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k>1$ فإن f دالة ثابتة.

البرهان: لنبرهن أن: $\forall A,B \in [a,b] \Rightarrow f(A)=f(B) \,;\, A<B$

ليكن $[a,b]$



$$A,B \in [a,b] : A<B \quad , \quad \Delta x = \frac{B-A}{n}$$

ولتكن التجزئة P للمجال $[A,B]$ حيث: $P=\{A=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

$$0 \leq |f(B)-f(A)| = |f(x_n)-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})+f(x_{n-2})-$$

$$-f(x_{n-2})+\dots+f(x_1)-f(x_1)-f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x_n)-f(x_{n-1})|+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|+\dots$$

$$\dots+|f(x_1)-f(x_0)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(B)-f(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$0 \leq |f(B)-f(A)| \leq L|x_n-x_{n-1}|^k + L|x_{n-1}-x_{n-2}|^k+\dots+L|x_1-x_0|^k$$

$$0 \leqslant |f(B) - f(A)| \leqslant L \left| \frac{|B-A|^k}{n^k} + \dots + \frac{|B-A|^k}{n^k} \right| ; \Delta x = \frac{B-A}{n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant |f(B) - f(A)| \leqslant L|B-A|^k \left[\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \right] =$$

$$= \frac{L|B-A|^k}{n^{k-1}}$$

عندما $n \longrightarrow +\infty$ فإن $0 \leqslant |f(B) - f(A)| \leqslant 0$

$\Leftarrow$ $f(A) = f(B)$ فالدالة f ثابتة.

انتهت المحاضرة ...