10/5/2015 الخامس عشرة/5/ عملي

النص 12 ⟵ 2 — أ/ $A \subseteq B \Rightarrow cl\,A \subseteq cl\,B$

التدري 2 ⟵ 4 — ب/ $(\overline{A\cup B}) = cl(A\cup B) = cl\,A \cup cl\,B$

الإسناد 1 ⟵ 3

بالاعتماد على

اللاصقة لـ D = مجموع النقاط اللاصقة لـ D

الحل:

أ/ $x \in cl\,A \Rightarrow \forall r > 0 :$

$$N(x,r) \cap A \neq \phi$$

بما أن $N(x,r)\cap B \supseteq N(x,r)\cap A \neq \phi \Leftarrow B \supseteq A$

إذن

$$x \in cl\,B \Leftarrow (\forall r>0)\ N(x,r)\cap B \neq \phi$$

ب:

$$cl\,A \subseteq cl(A\cup B) \Leftarrow A \subseteq A\cup B$$

$$cl\,B \subseteq cl(A\cup B) \Leftarrow B \subseteq A\cup B$$

$$\Leftarrow$$

$$cl\,A \cup cl\,B \subseteq cl(A\cup B)$$

سنثبت الاحتواء الثاني $cl\,A \cup cl\,B \supseteq cl(A\cup B)$

ليكن $x \in cl(A\cup B)$

$\Leftarrow$ $\forall r > 0$

$$N(x,r)\cap(A\cup B) \neq \phi$$

* إذا كان $x \in cl\,A \Leftarrow x \in cl\,A \cup cl\,B$

** إذا كان $x \notin cl\,A$ ، سنثبت أن $x \in cl\,B$ في هذه الحالة

$x \notin cl\,A \Leftarrow$ يوجد $r_0 > 0$ بحيث

$$N(x,r_0)\cap A=\phi$$

وبإثبات أن $x \in clB$

ليكن $r>0$ ولنأخذ $\bar{r}=\min\{r_0,r\}$

بما أن $x \in cl(A\cup B) \Leftarrow$

$$\phi \neq N(x,\bar{r})\cap(A\cup B)=(N(x,\bar{r})\cap A)\cup(N(x,\bar{r})\cap B)$$
$$\subseteq (N(x,r_0)\cap A)\cup(N(x,r)\cap B)$$
$$= \phi \cup (N(x,r)\cap B)$$
$$= N(x,r)\cap B$$

إذن $N(x,r)\cap B \neq \phi \;\; \forall r>0 \Leftarrow x\in clB \Leftarrow$ $x \in clA\cup clB$

$\bar{r}\leq r_0 \Rightarrow N(x,\bar{r})\subseteq N(x,r_0)$

$\bar{r}\leq r \Rightarrow N(x,\bar{r})\subseteq N(x,r)$

هات مثال على جماعة من المجموعات المغلقة في فضاء متري اتحادها غير مغلقة، وجماعة من المجموعات المفتوحة تقاطعها غير مفتوح.

الحل:

I) لتكن R مزودة بالمسافة المألوفة

$$d(x,y)=|x-y|$$

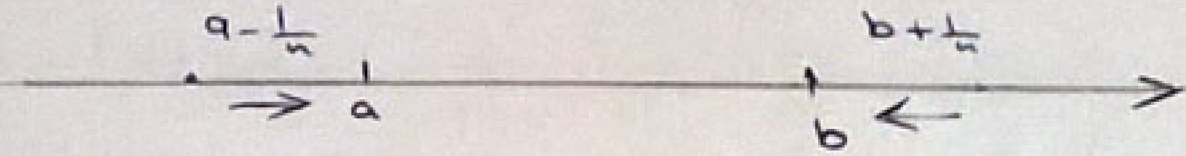
ولتكن الجماعة $(A_n)_{n\in N}$ حيث

$$A_n=\left]a-\frac{1}{n},\, b+\frac{1}{n}\right[$$

إن A_n مجموعة مفتوحة $\forall n\in N$ "هل تقاطعها مفتوح؟"

وعكسه إثبات أن

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right[= [a,b]$$



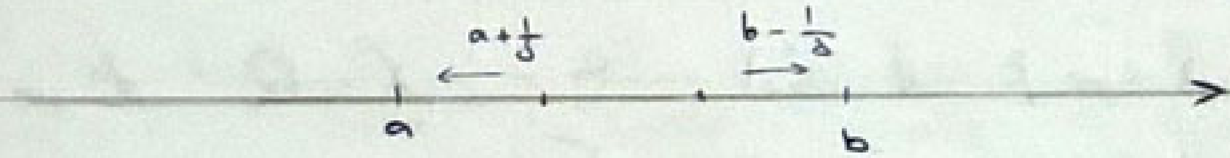
المجال $[a,b]$ هو مجموعة غير مفتوحة في R لأن كلاً من a, b ليست نقاط داخلية لِ $[a,b]$

(II) المتتالية $(B_j)_{j\in N}$ حيث

$$B_j = \left[a+\frac{1}{j}, b-\frac{1}{j}\right]$$

هي متتالية من المجموعات المغلقة في R يمكن أن نثبت أن

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j =]a,b[$$



المجال $]a,b[$ ليس مجموعة مغلقة في R

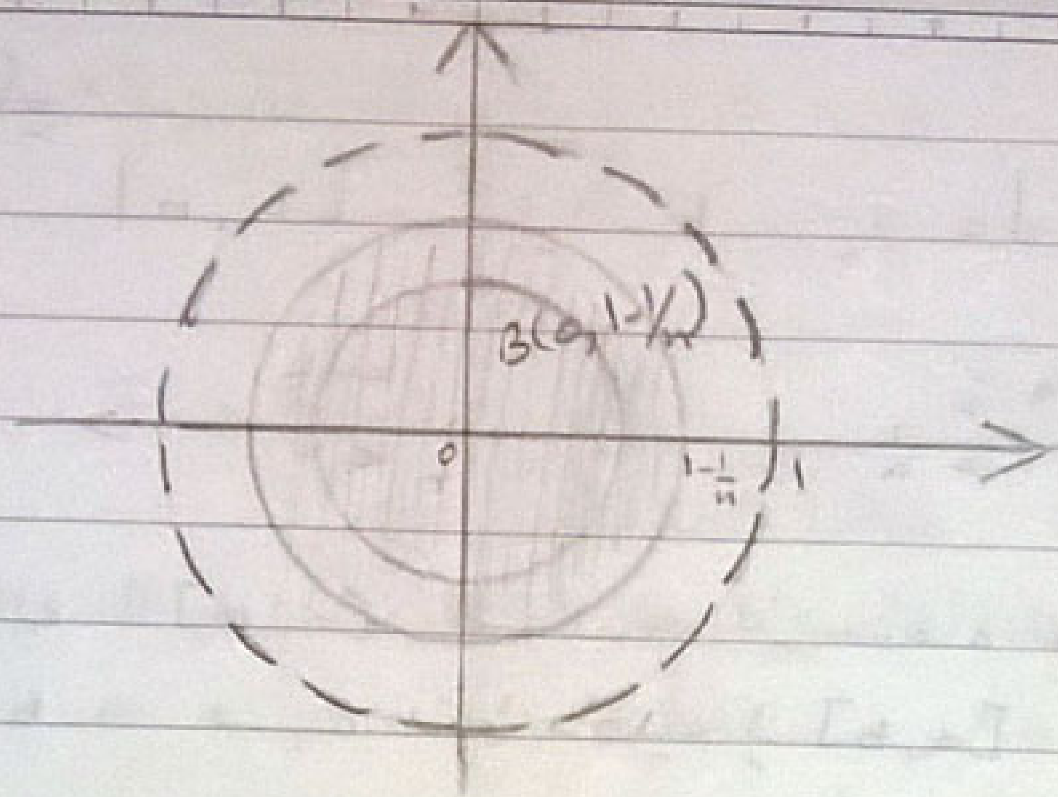
/حل آخر:/

في (R^2, d)

$$F_n = B\left(0, 1-\frac{1}{n}\right) = \left\{(x,y)\in R^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le 1-\frac{1}{n}\right\}$$

$d = \sqrt{\ }$

مجموعات مغلقة في R^2



غير مغلق اتحاد مغلقات

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} F_n = N(0,1)$$

هل الدالة $d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$

مسافة على $X = R$ ؟ أثبت ذلك ثم بين ان المتتالية

$x_n = n$ $(1 \leq n)$ كوشية في (R,d) لكنها غير متقاربة

في (R,d) ؟ "يعني أن الفضاء المتري (R,d) غير تام"

الحل: d مسافة لأن

① $d \geq 0$

② $d(x,y) = 0 \iff \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}$

$\Leftarrow \left| \frac{x}{1+|x|} \right| = \left| \frac{y}{1+|y|} \right|$

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{|y|}{1+|y|} \Leftarrow$$

$$|x| + \cancel{|x||y|} = |y| + \cancel{|y||x|} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow 1+|x| = 1+|y|$$

$$\left(\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|}\right) \Rightarrow x = y$$

$$d(x,y) = 0 \Leftarrow$$

3) $d(y,x) = d(x,y)$ واضح.

4) متراجح المثلث واضح.

$$d(x,z) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{z}{1+|z|}\right|$$

$$= \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} + \frac{y}{1+|y|} - \frac{z}{1+|z|}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| + \left|\frac{y}{1+|y|} - \frac{z}{1+|z|}\right|$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

اذن d مسافة.

المتتالية $\{x_n\} = \{n\}$ كوشية في (R,d)

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists N \in \mathbb{N} \,;\ m,n \geq N \Rightarrow$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

الحل

$$d(x_n, x_m) = d(n, m)$$

$$= \left| \frac{n}{1+n} - \frac{m}{1+m} \right|$$

$$= \left| \frac{1+n-1}{1+n} - \frac{1+m-1}{1+m} \right|$$

$$= \left| \cancel{1} - \frac{1}{1+n} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{1+m} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

الجزء الصحيح لـ x

$[x] \leq x < [x]+1$

دالة الجزء الصحيح

نعتبر أن $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = N$

من خواص دالة الجزء الصحيح

$$\frac{2}{\varepsilon} \leq \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 = N$$

من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\left[\frac{\varepsilon}{2}\right] + 1 = N$ حيث أنه اذا كان

$$n, m \geq N \Rightarrow \begin{cases} n > \frac{2}{\varepsilon} \\ m > \frac{2}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

اذن $\{x_n\}$ كوشي في (R, d)

لكنها ليست متقاربة في (R, d) لانه لو

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \in R \Rightarrow d(x_n, a) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n}{1+n} - \frac{a}{1+|a|} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

نعلم ان $\frac{n}{1+n} \longrightarrow 1$

$$\left| \frac{n}{1+n} - \frac{a}{1+|a|} \right| \longrightarrow \left| 1 - \frac{a}{1+|a|} \right|$$

(في الفضاء المتري اذا كانت المتتالية متقاربة فهي متقاربة من نقطة
وحده)

هذا صحيح في $(R, |\cdot|)$

$$\Rightarrow \left| 1 - \frac{a}{1+|a|} \right| = 0$$

$$1 = \frac{a}{1+|a|} \Rightarrow a = 1 + |a| \Rightarrow$$

a موجب

$$a = 1 + a$$

$$1 = 0$$

وهذا مستحيل

، من الفرض الجدلي خاطئ ، وهي غير متقاربة ← الفضاء المتري غير تام

اثبت ان صورة A في مجموعة جزئية متراصة في فضاء متري (X, d) هي محدودة.

ثم اثبات في الفرض.

هل الفضاء $(R, |.|)$ متراص؟

(R^2, d) ، (R^m, d) ، (R^n, d_1)

$(R, |.|)$ غير متراص

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[= R$$

$$R \subseteq]-n_1, n_1[\cup \dots \cup]-n_k, n_k[\subseteq R$$

لكن $]-n_i, n_i[\subseteq]-n, n[$

حيث

$$n = \max_{1 \le i \le k} n_i$$

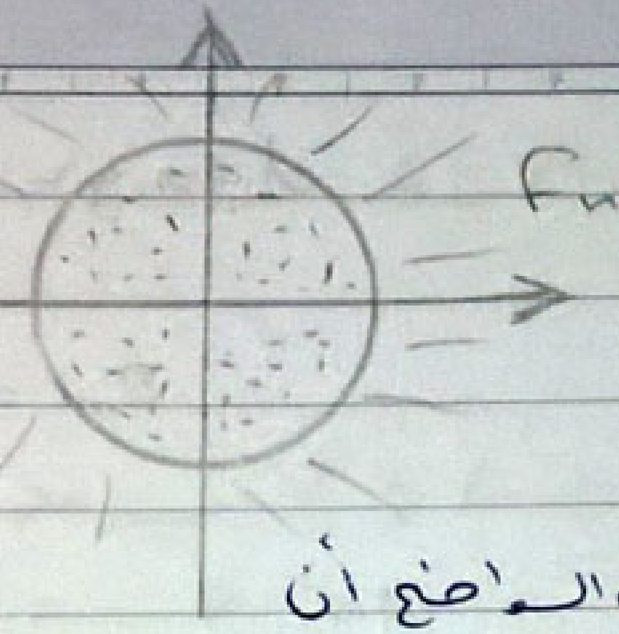
$$\Rightarrow R \subseteq]-n, n[\subseteq R$$

$$R =]-n, n[$$

وهذا مستحيل.

(R^2, d)

مجموعة الكرة المتمحورة التي مركزها 0 ونصف قطرها n $\quad F_n = \{(x, y) \in R^2 : n \le \sqrt{x^2 + y^2}\}$



من الواضح أن $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots, F_{n_k}$

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \cdots \cap F_{n_k} = F_n \neq \phi$$

$$n = \max_{1 \le i \le k} n_i$$

ومع ذلك $\bigcap_{n \ge 1} F_n = \phi$

لأنه اذا كان $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \ni (x, y)$

$$\Rightarrow n \le \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall n \ge 1$$ (مستحيل)

لذلك الفضاء (R^2, d) غير متراص

س

(R^m, d)

$$F_n = \{ x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m ; \; n \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} = d(x, 0) \}$$

س

(R^n, d_1)

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\vartheta_m = N(0, m)$$
$$= \{x \in R^n : d(x,0) < m\}$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \vartheta_m = R^n$$

لا يمكن إيجاد تغطية جزئية منتهية منه

$$\vartheta_{m_1}, \vartheta_{m_2}, \ldots, \vartheta_{m_k}$$

حيث

$$\bigcup_{i=1}^{k} \vartheta_{m_i} = R^n$$

لأن

$$\vartheta_{m_i} \subseteq \vartheta_m$$

حيث

$$m = \max_{1 \le i \le k} m_i$$

$$R^n = \bigcup_{i=1}^{k} \vartheta_{m_i} \subseteq \vartheta_m \subseteq R^n \Rightarrow$$

$\vartheta_m = R^n$ (تناقض)

أثبت أن

متراص (X, d) $\Leftrightarrow$ متراص $(X, d_1 = \frac{d}{d+1})$ $\Leftrightarrow$ متراص $(X, d_2 = \min\{1, d\})$

وذلك بإثبات أن إذا كانت

$A \subseteq X$ مفتوحة في (X,d) $\Leftrightarrow$ A مفتوحة في (X,d_1) $\Leftrightarrow$ A مفتوحة في (X,d_2)

الحل: $A \subseteq X$ مفتوحة في $(X,\underline{d})$ $\Leftarrow$

إذا كانت $a \in A$ $\Leftarrow$ يوجد $0 < r$ بحيث

$$N_{\underline{d}}(a,r) \subseteq A$$

يجب إيجاد $0 < \varepsilon$ بحيث

$$N_{d_1}(a,\varepsilon) \subseteq N_d(a,r) \subseteq A$$

إذا كانت $\varepsilon = \frac{r}{1+r}$ فإن الاحتواء يتحقق لأن

$$x \in N_{d_1}(a,\varepsilon) \Rightarrow d_1(a,x) < \frac{r}{1+r} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{d(a,x)}{1+d(a,x)} < \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow d(a,x) < \frac{r}{1+r} + \frac{r}{1+r} d(a,x)$$

$$\left(1 - \frac{r}{1+r}\right) d(a,x) < \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+r} d(a,x) < \frac{r}{1+r}$$

$$\Rightarrow d(a,x) < r \Rightarrow$$

$$x \in N_d(a,r)$$

إذا $N_{d_1}(a,\varepsilon) \subseteq A \Leftarrow$ A مفتوحة في (X, d_1)

بالعكس

إذا كانت A مفتوحة في (X, d_1)

$\Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث $N_{d_1}(a,r) \subseteq A$

وفي هذه الحالة نلاحظ أن

$$N_d(a,r) \subseteq N_{d_1}(a,r)$$

لأنه إذا كان $x \in N_d(a,r)$

$$\Rightarrow d(x,a) < r$$

ومن الواضح أن

$$\frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} = d_1(x,a) \le d(x,a)$$

$$\Rightarrow d_1(x,a) < r$$

$$\Rightarrow x \in N_{d_1}(a,r)$$

$$1 \le 1 + d(x,a)$$
$$d(x,a) \le d(x,a)(1+d(x,a))$$
$$\frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} \le d(x,a)$$
$$d_1(x,a) \le d(x,a)$$

$\Rightarrow N_{d_1}(a,r) \subseteq A \Rightarrow$

A مفتوحة في (X, d_1)

تمرين:

$d_2(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$;

$$d_2(x,y) \le 1$$

$$d_2(x,y) \le d(x,y)$$

A مفتوحة في $(X, d) \Longleftrightarrow$ A مفتوحة في (X, d_2)

A مفتوحة في (X, d_2) $\Leftarrow$

لكل $a \in A$ يوجد $r > 0$ بحيث

$$N_{d_2}(a, r) \subseteq A$$

نلاحظ أن

$N_d(a, r) \subseteq N_{d_2}(a, r)$ لأنه إذا كان

$$x \in N_d(a, r)$$

$$\Rightarrow d(x, a) < r$$

$$d_2(x, a) \le d(x, a) < r \Leftarrow$$

$$d_2(x, a) < r$$

إذن $x \in N_{d_2}(a, r)$

وبالتالي

$$N_{d_2}(a, r) \subseteq A$$

$\Leftarrow$ A مفتوحة في (X, d)

وبالعكس

إذا كانت A مفتوحة في (X, d) $\Leftarrow$ لكل $a \in A$ يوجد

$r > 0$

$$N_d(a, r) \subseteq A$$

يوجد $\varepsilon = \min\{1, r\}$ بحيث $N_{d_2}(a, \varepsilon) \subseteq N_d(a, r)$

$\varepsilon \le 1$ ؛

$\varepsilon \le r$

وذلك لأنه $\quad N_{d_2}(a,\varepsilon) \ni x$

$$\Longrightarrow d_2(x,a) < \varepsilon \leq 1$$

$$\Longrightarrow d_2(x,a) < 1$$

إذن $\quad d(x,a) = d_2(x,a)$

$$\Longrightarrow d(x,a) < \varepsilon \leq r$$

$$\Longrightarrow d(x,a) < r$$

إذن

$$\Longrightarrow x \in N_d(a,r)$$

$\Leftarrow$

$N_{d_2}(a,\varepsilon) \subseteq A \Leftarrow$ A مفتوحة في (X,d_2).

انتهت