مبرهنة (2) بالتماثل:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة و $I, J \trianglelefteq \mathbb{R}$ أن القضايا التالية صحيحة:

1) $I+J/I \cong J/I\cap J$

2) $J \subseteq I$ ، $\mathbb{R}/J \,/\, I/J \cong \mathbb{R}/I$

الإثبات:

رقم 1. عندنا $I \trianglelefteq \mathbb{R}$ ، $I \trianglelefteq I+J$ ، $J \leq \mathbb{R}$ ، $I\cap J \trianglelefteq J$

$I \subseteq I+J \leq \mathbb{R}$ (من تمرين سابق)

$I \trianglelefteq I+J.$

نعرف العلاقة: $\varepsilon : J \longrightarrow I+J/I$

$\varepsilon(x) = x+I$ و $x \in J$

1- ε تشاكل حلقي لأن:

* $x, y \in J$ $\quad \varepsilon(x+y) = (x+y)+I$

$= (x+I)+(y+I) = \varepsilon(x)+\varepsilon(y)$

* $\varepsilon(x.y) = (x.y)+I = (x+I).(y+I)$

$= \varepsilon(x).\varepsilon(y)$

حسب المبرهنة الأساسية بالتماثل فإن: $\dfrac{J}{\ker \varepsilon} \cong \operatorname{Im}\varepsilon.$ ..... *

لنثبت أن ε غامر:

لأن $I \trianglelefteq I+J$ ، $Z+I \in \dfrac{I+J}{I} \longrightarrow Z \in I+J.$

$\exists x \in I, \, y \in J \,;\, Z = x+y.$

$Z+I = (x+y)+I = (x+I)+(y+I) = I+(y+I)$

$= y+I.$

$\exists y \in J \,;\, \varepsilon(y) = y+I = Z+I.$ (معناها لأي عنصر من المستقر يوجد له عنصر)

ومنه نجد: $\operatorname{Im}\varepsilon = I+J/I$ (المستقر)

بالتعويض * نجد : $J/\ker \varepsilon \cong I+J/I$

ولنثبت ان: $\ker \varepsilon = I\cap J$

$$\ker(\varepsilon)=\{x\in J : \varepsilon(x)=0=I\}$$

$$\{x\in J , x+I=I\}$$

$$=\{x\in J : x\in I\}=I\cap J$$ فيكون $\ker\varepsilon = I\cap J$

ومنه $J/I\cap J \cong \dfrac{I+J}{I}$

رقم (2) $I\trianglelefteq R$ $J\trianglelefteq R$ $J\subseteq I$ حسب الفرض.

$J\trianglelefteq I$ $I/J \trianglelefteq R/J$

ونريد ان نثبت ان: $R/J / I/J \cong R/I$

لنعرف العلاقة:

$$\varepsilon : R/J \longrightarrow R/I$$

بالشكل: $\bar{x}=x+J : \varepsilon(\bar{x})=x+I$

1) ε تطبيق:

$$x_1+J=x_2+J$$

$$\rightarrow x_1-x_2\in J\subseteq I$$

$$=(x_1-x_2)+I=I.$$

$$x_1+I=x_2+I$$

$$\rightarrow \varepsilon(x_1+J)=\varepsilon(x_2+J)$$

2) ε تشاكل حلقي لأن:

$$\bar{x}=x+J , \bar{y}=y+J\in R/J.$$

$$* \quad \varepsilon(\bar{x}.\bar{y})=\varepsilon((x.y)+J)=(x.y)+I.$$

$$=(x+I)(y+I)=\varepsilon(\bar{x}).\varepsilon(\bar{y})$$

$$* \quad \varepsilon(\bar{x}+\bar{y})=\varepsilon((x+y)+J)=(x+y)+I$$

$$(x+I)+(y+I)=\varepsilon(\bar{x})+\varepsilon(\bar{y})$$

3) لنثبت أن ε غامر: من المبرهنة الأساسية للتماثل $\mathbb{R}/J/\ker\varepsilon \cong \mathrm{Im}\,\varepsilon$

$$r+I \in \mathbb{R}/I \rightarrow r \in \mathbb{R}$$

$$r+J \in \mathbb{R}/J$$

$$\varepsilon(r+J) = r+I$$

$$\forall r+I \in \mathbb{R}/I : \exists r+J \in \mathbb{R}/J$$

$$\varepsilon(r+J) = r+I$$

ومنه ε غامر فيكون $\frac{\mathbb{R}/J}{\ker\varepsilon} \cong \mathbb{R}/I$

لنثبت أن $\ker\varepsilon = I/J$

$$x+J \in \ker\varepsilon \longleftrightarrow \varepsilon(x+J) = I$$

$$\leftrightarrow x+I = I \leftrightarrow x \in I$$

$$\leftrightarrow x+J \in I/J$$

وبالتالي $\ker\varepsilon = I/J$

فيكون $\mathbb{R}/J/I/J \cong \mathbb{R}/I$

وهو المطلوب

في المبرهنة السابقة ذكرت المبرهنة نفسها ولكن بصيغة أخرى:

$$\frac{R/J}{I/J} \cong \mathbb{R}/J$$

I وليس

وهذا صحيح لأن $S/J \subseteq R/I$

فيكون $S \subset R$

$J \subset I$

الجزء الثاني (الفصل الرابع):

4-3: المثاليات الأولية والأعظمية في حلقة $\mathbb{R}$:

تعريف: 4-3-1:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة تبديلية نقول عن $P \lneq \mathbb{R}$ (مثالي لا يساوي كامل الحلقة) أنه مثالي أولي إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1- $I, J \trianglelefteq \mathbb{R}$; $I.J \subseteq P$

فإن $J \subseteq P$ أو $\rightarrow I \subseteq P$

2- $a, b \in \mathbb{R}$, $a.b \in P$

$\rightarrow a \in P$ أو $b \in P$

3- $\mathbb{R}$ حلقة تامة (الشرط نستنتج منها). فإن $\mathbb{R}/P$ هي Id (الحالية ...)

- ونرمز لمجموعة جميع المثاليات الأولية في R بالرمز:

$spec(R) = \{P : P \text{ مثالي أولي في } R\}$ (طيف المثاليات الأولية)

نقول عن $M \ntrianglelefteq R$ (مثالي لا يساوي كامل الحلقة) أنه مثالي أعظمي في R

إذا تحقق أحد الشروط الآتية:

1) $I \trianglelefteq R$, $M \subset I \subseteq R$

$\rightarrow I = R$

أي كلا الأمرين 1 و 2

معناها: أنه لا يوجد مثالي أكبر منه

2) $J \triangleleft R$, $M \subseteq J \subset R$

$\rightarrow M = J$

3) R حلقة واحدية (شرط أساسي)

فيكون: R/M حقل

- نرمز لمجموعة كل المثاليات الأعظمية في R بالرمز:

$M\text{-}spec(R) = \{M : M \text{ مثالي أعظمي في } R\}$

ونرمز له بالشكل: $M \triangleleft_{\circ} R$

الجذر الأساسي للحلقة:

$$N(R) = \bigcap_{P \in spec(R)} P \trianglelefteq R$$

(تقاطع كل المثاليات الأولية في R مثالي)

جذر جاكبسون (jacobson radical):

$$J(R) = \bigcap_{Z \in Z\text{-}spec(R)} Z \trianglelefteq R$$

(تقاطع كل المثاليات الأعظمية في R هو مثالي أعظمي)

أمثلة:

مثال 1) $R(Z, +, \cdot)$

المثاليات الأولية في $R=(Z, +, \cdot)$

كل p عدد أولي يولد مثالي أولي $p=\langle p\rangle$

إن $(p \subsetneq R)$ $p=\langle p\rangle$ مثالي أولي لأن:

لنفرض جدلاً أن $p=\mathbb{R}$ (أي مثالي = كل الحلقة) فإنه يحوي إما 1 أو عنصر قابل للقلب

(حسب ملاحظة سابقة في المثاليات)

$1 \in p=\langle p\rangle \longrightarrow$ 1 يقسم $p \longrightarrow p \mid 1$

وهذا غير ممكن لأن p عدد أولي ومنه الفرض الجدلي خاطئ

فيكون $p \subsetneq \mathbb{R}$

من الشرط (2):

$x, y \in \mathbb{R}$ ، $x \cdot y \in p=\langle p\rangle$

$p \mid x\cdot y \longrightarrow p \mid x \quad \vee \quad p \mid y$

إما $x \in p=\langle p\rangle$

أو $y \in p=\langle p\rangle$

وبالتالي يكون p مثالي أولي

كل أعظمي هو أولي في الحلقة
فقط أما في الحالة العامة ليس
كل أعظمي هو أولي.

المثاليات الأعظمية في Z:

هي كل المثاليات الأولية عدا الصفر

$spec(\mathbb{R}) = \{\langle p\rangle$ ، p عدد أولي$\} \cup \{0\}$

$M\text{-}spec(\mathbb{R}) = \{\langle p\rangle$ ، p عدد أولي$\}$

الجذر الأساسي:

$N(\mathbb{R})=0$ الصفر محتوى في أي مثالي

مثال (٤): $R = (2\mathbb{Z}, +, \cdot)$

المثاليات الأعظمية.

$M = \langle 4 \rangle \trianglelefteq R$

$M \ntrianglelefteq R$ ← لأنه بذلك يكون $M = R$

هذا يعني أن: $2 \in R \to 2 \in M$

وهذا غير ممكن. $4 | 2 \longrightarrow$ فيكون

فيكون الفرض الجدلي خاطئ.

مبرهنة(1): ليكن $I \trianglelefteq R$ تحقق $M \subsetneq I \subseteq R$ حتى يكون M أعظمي

يجب أن يكون $I = R$.

$\longrightarrow \exists x \in I : x \notin M = \langle 4 \rangle$

$x = 2r : r \in \mathbb{Z}$

(عدد ~~[illegible]~~ زوجي لا يقبل القسمة على 4) $\longrightarrow \underset{\in I}{x} = \underset{\in I}{4j} + 2 \quad j \in \mathbb{Z}, x \in I$

$\longrightarrow 2 \in I \longrightarrow I = \mathbb{Z} = R \longrightarrow$

ومنه M مثالي أعظمي

M ليس مثالي أوليًا:

$4 = 2.2$ ؛ $4 \in M$

ولكن $2 \in M$ $2 \in M$ أو $2 \in M$ إما

إذا كانت $2 \in M$ فإن $M \in 2\mathbb{Z}$. وهذا تناقض

مثال (٣) إذا كان p عدد أولي $R(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$

المثاليات هي صفر و $\mathbb{Z}_p$ (لأن $\mathbb{Z}_p$ حقل)

0 هو مثالي أولي وأعظمي.

مثال (٨): $\mathbb{R}(Z_6,+,\cdot)$

المثاليات الأساسية:

$\{0\}, \langle 3\rangle, \langle 2\rangle, \langle 5\rangle$ أعداد أولية مع [0] ضمناً

$M\text{-spec}(\mathbb{R})=\{\langle 2\rangle,\langle 3\rangle,\langle 5\rangle\}$

$J(\mathbb{R})=\langle 2\rangle\cap\langle 3\rangle\cap\langle 5\rangle=\langle 30\rangle=\langle 0\rangle$ نأخذ المضاعف المشترك الأصغر للأعداد.

$N(\mathbb{R})=\langle 0\rangle$

لتكن R حلقة تبديلية

١. إذا كان $p\in \text{spec}(\mathbb{R})$ فإنه ليس بالضرورة أن تكون R/p هي Id

٢. إذا كان $M\in M\text{-spec}(\mathbb{R})$ فإنه ليس بالضرورة أن تكون $\mathbb{R}/M$ حقل.

٣. إذا كانت $\mathbb{R}$ حلقة واحدية فعكس السابق (٢) ليس بالضرورة صحيح

تمهيدية زورن:

لتكن $(M,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً إذا كانت كل سلسلة

$(\dots\leq M_1\leq M_2\leq\dots)$ متزايدة من عناصر M لديها حد أعلى (محدودة من الأعلى في M)

فإنه يوجد عنصر أعظمي $m\in M$.