نظرية الفئات

المحاضرة الثانية عشرة

٢١/٤/٢٠١٥

النواة ، النواة المرافقة

* النواة:

- تعريف: لتكن $\mathcal{C}$ فئة ، ولتكن $u_1,u_2: A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$ ولتكن (N,f) حيث $N\in ob(\mathcal{C})$ ، و $f:N\longrightarrow A$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$.
نسمي الثنائية (N,f) نواة للمورفيزمين u_1,u_2 إذا حققت الشروط:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "g"'] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

١- أياً كان $X\in ob(\mathcal{C})$ ،
ولأجل أي مورفيزم $g: X \longrightarrow A$
يحقق: $u_1 \cdot g = u_2 \cdot g$
يوجد مورفيزم وحيد $\lambda: X \longrightarrow N$
يحقق: $f \cdot \lambda = g$ (يجعل المخطط تبديلياً)

٢- إذا كان لأجل أي مورفيزم $g: X \longrightarrow A$ يوجد مورفيزم $\lambda: X \longrightarrow N$ بحيث $f\cdot\lambda = g$ فإن:
$$u_1 \cdot g = u_2 \cdot g$$

- نتيجة: إذا كانت (N,f) نواة للمورفيزمين u_1 , u_2 عندئذٍ فإن:
$$u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$$

الإثبات: بأنه لأجل $f: N \longrightarrow A$ المخطط المرسوم تبديلي ، أي: $f \cdot I_N = f$
فإن: $u_1 \cdot f = u_2 \cdot f$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[ur, "I_N"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

* النواة المرافقة:

- **تعريف:** لتكن $\mathcal{C}$ فئة، ولتكن $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$.
ولتكن (N, f) حيث $N \in ob(\mathcal{C})$ و $f : B \longrightarrow N$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$.
نقول إن الثنائية (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 إذا حققت الشروط:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

1- أياً كان $X \in ob(\mathcal{C})$،
ولأجل أي مورفيزم $g : B \longrightarrow X$
يحقق: $g \cdot u_1 = g \cdot u_2$
يوجد مورفيزم وحيد $\mu : N \longrightarrow X$
يحقق: $\mu \cdot f = g$ (لجعل المخطط تبديلياً)

2- إذا كان لأجل أي مورفيزم $g : B \longrightarrow X$ يوجد مورفيزم $\mu : N \longrightarrow X$ بحيث $\mu \cdot f = g$ فإن:
$g \cdot u_1 = g \cdot u_2$

- **نتيجة:** إذا كانت (N, f) نواة مرافقة للمورفيزمين u_1, u_2 عندئذٍ:
$f \cdot u_1 = f \cdot u_2$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "I_N"] & \\
B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

الإثبات: بما أنه لأجل $f : B \longrightarrow N$ المخطط المرسوم: تبديلي، أي: $I_N \cdot f = f$
فإن: $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$

مبرهنة: لتكن $\mathcal{C}$ فئة، و $u_1, u_2 : A \longrightarrow B$ مورفيزمين للفئة $\mathcal{C}$.
إذا كانت (N, f) ، (M, μ) نواتان للمورفيزمين u_1, u_2.
عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم وحيد:
$\alpha : M \longrightarrow N$
بحيث: $\mu \cdot \alpha = f$

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

البرهان:

- بما أن (N, f) نواة للمورفيزمين u_1, u_2
فإنه لأجل المورفيزم $\mu: M \longrightarrow A$ الذي يحقق:
$u_1.\mu = u_2.\mu$ (لأن μ نواة)
حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $\alpha: M \longrightarrow N$
يحقق: $\boxed{f.\alpha = \mu}$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

- من جهة أخرى بما أن (M, μ) نواة للمورفيزمين u_1, u_2
فإنه لأجل المورفيزم $f: N \longrightarrow A$ الذي يحقق:
$u_1.f = u_2.f$ (لأن f نواة)
حسب التعريف يوجد مورفيزم وحيد $\beta: N \longrightarrow M$
يحقق: $\boxed{\mu.\beta = f}$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] & \\ N \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

- لنعوض العلاقتين الناتجتين ببعضهما:

* $\mu = f.\alpha = (\mu.\beta).\alpha = \mu.(\beta.\alpha)$

أي أن المورفيزم $\beta.\alpha$ يجعل المخطط المرسوم تبديلياً:
ولكن المورفيزم I_M أيضاً يجعل المخطط تبديلياً
لأن: $\mu = \mu.I_M$
ولكن حسب التعريف فالمورفيزم الذي يجعل المخطط تبديلياً وحيد، ومنه: $\boxed{\beta.\alpha = I_M}$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\mu"] & \\ M \arrow[ur, "\beta.\alpha", "I_M"'] \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

* $f = \mu.\beta = (f.\alpha).\beta = f.(\alpha.\beta)$

أي أن المورفيزم $\alpha.\beta$ يجعل المخطط المرسوم تبديلياً:
ولكن المورفيزم I_N أيضاً يجعل المخطط تبديلياً
لأن: $f = f.I_N$
ولكن حسب التعريف فالمورفيزم الذي يجعل المخطط تبديلياً وحيد، ومنه: $\boxed{\alpha.\beta = I_N}$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[ur, "\alpha.\beta", "I_N"'] \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, shift left, "u_1"] \arrow[r, shift right, "u_2"'] & B \end{tikzcd}$$

وهذا يبين أن α إيزومورفيزم، وهو وحيد حسب التعريف.

نهاية المحاضرة الثانية عشرة