

# نظرية الفئات

المحاضرة الثانية عشرة

١٤/٤/٢٠١٥

نواة ، النواة المرافقة

\* النواة:

**تعريف:** لنكن  $\lambda$  فئة ، وليكن  $u_1, u_2: A \rightarrow B$  مورفيزمين للفئة  $\mathcal{A}$  ولنكن  $(N, f)$  حيث  $N \in \text{ob}(\mathcal{A})$  ، و  $f: N \rightarrow A$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{A}$  .  
 سمي الثنائية  $(N, f)$  نواة للمورفيزمين  $u_1, u_2$  إذا حققت الشروط:

١- أياً كان  $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$  ،

ولأجل أي مورفيزم  $g: X \rightarrow A$

يحق:  $u_1 \circ g = u_2 \circ g$

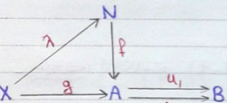
يوجد مورفيزم وحيد  $\lambda: X \rightarrow N$

يحق:  $f \circ \lambda = g$  (يجعل المخطط تبديلياً)

٢- إذا كانت لأجل أي مورفيزم  $g: X \rightarrow A$  يوجد مورفيزم

$\lambda: X \rightarrow N$  بحيث  $f \circ \lambda = g$  فإن:

$$u_1 \circ g = u_2 \circ g$$



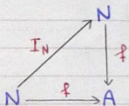
**نتيجة:** إذا كانت  $(N, f)$  نواة للمورفيزمين  $u_1, u_2$  عندئذ فإن:

$$u_1 \circ f = u_2 \circ f$$

البيانات: بما أنه لأجل  $f: N \rightarrow A$  المخطط المرسوم:

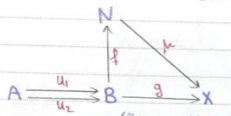
تبديلياً ، أي:  $f \circ I_N = f$

فإن:  $u_1 \circ f = u_2 \circ f$



النواة المرافقة \*

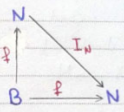
تعريف: لكن لا فئة ، وليكن  $u_1, u_2 : A \rightarrow B$  مورفيزمين للفئة  $\mathcal{A}$  وليكن  $(N, f)$  حيث  $N \in \text{ob}(\mathcal{A})$  و  $f : B \rightarrow N$  مورفيزم للفئة  $\mathcal{A}$ . نقول إن الثنائية  $(N, f)$  نواة مرافقة للمورفيزمين  $u_1, u_2$  إذا حققت الشرط:



1- أيًا كان  $X \in \text{ob}(\mathcal{A})$  ولأجل أي مورفيزم  $g : B \rightarrow X$  يحقق :  $g \cdot u_1 = g \cdot u_2$  يوجد مورفيزم وحيد  $m : N \rightarrow X$  بحيث  $m \cdot f = g$  (يُعد المحظ تبديلياً)

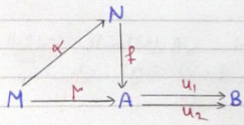
2- إذا كان لأجل أي مورفيزم  $g : B \rightarrow X$  يوجد مورفيزم  $m : N \rightarrow X$  بحيث  $m \cdot f = g$  فإن :  $g \cdot u_1 = g \cdot u_2$

نتيجة: إذا كانت  $(N, f)$  نواة مرافقة للمورفيزمين  $u_1, u_2$  عندئذٍ :  $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$



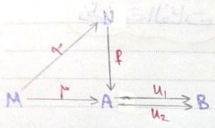
الإثبات: بما أنه لأجل  $f : B \rightarrow N$  المخطط المرسوم: تبديلي ، أي :  $I_N \cdot f = f$  فإن :  $f \cdot u_1 = f \cdot u_2$

تعريف: لكن لا فئة ، و  $u_1, u_2 : A \rightarrow B$  مورفيزمين للفئة  $\mathcal{A}$  إذا كانت  $(M, \mu)$  ،  $(N, f)$  نواتان للمورفيزمين  $u_1, u_2$  عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم وحيد :

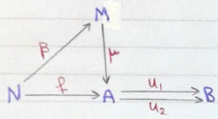


عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم وحيد :  $\alpha : M \rightarrow N$  بحيث :  $\mu \cdot \alpha = f$

البرهان:



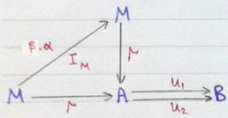
بأن (  $N, \phi$  ) نواة المورفيزم  $u_1, u_2$   
 فإنه لأجل المورفيزم  $\mu: M \rightarrow A$  الذي يحقق:  
 $u_1 \cdot \mu = u_2 \cdot \mu$  (لأن  $\mu$  نواة)  
 فبمسبب التعريف يوجد مورفيزم وحيد  $\alpha: M \rightarrow N$   
 يحقق:  $\phi \cdot \alpha = \mu$



من جهة أخرى بأن (  $M, \mu$  ) نواة المورفيزم  $u_1, u_2$   
 فإنه لأجل المورفيزم  $\phi: N \rightarrow A$  الذي يحقق:  
 $u_1 \cdot \phi = u_2 \cdot \phi$  (لأن  $\phi$  نواة)  
 فبمسبب التعريف يوجد مورفيزم وحيد  $\beta: N \rightarrow M$   
 يحقق:  $\mu \cdot \beta = \phi$

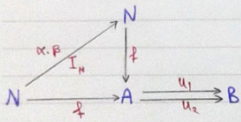
لنفرض العلاقات الناتجة ببعضها:

\*  $\mu = \phi \cdot \alpha = (\mu \cdot \beta) \cdot \alpha = \mu \cdot (\beta \cdot \alpha)$



أي أن المورفيزم  $\beta \cdot \alpha$  يجعل المخطط المرسوم تبديلياً.  
 ولكن المورفيزم  $I_M$  أيضاً يجعل المخطط تبديلياً  
 لأن:  $\mu = \mu \cdot I_M$   
 ولكن حسب التعريف فالمورفيزم الذي يجعل المخطط  
 تبديلياً وحيد، ومنه:  $\beta \cdot \alpha = I_M$

\*  $\phi = \mu \cdot \beta = (\phi \cdot \alpha) \cdot \beta = \phi \cdot (\alpha \cdot \beta)$



أي أن المورفيزم  $\alpha \cdot \beta$  يجعل المخطط المرسوم تبديلياً.  
 ولكن المورفيزم  $I_N$  أيضاً يجعل المخطط تبديلياً  
 لأن:  $\phi = \phi \cdot I_N$   
 ولكن حسب التعريف فالمورفيزم الذي يجعل المخطط  
 تبديلياً وحيد، ومنه:  $\alpha \cdot \beta = I_N$

وهذا يبين أن  $\alpha$  لايزد مورفيزم وهو وحيد حسب التعريف.