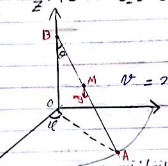
مثال:

AB قضيب طوله $2l$ مهمل الكتلة يتحرك في الفضاء حيث تنزلق نهايته A بدون احتكاك على المستوي الأفقي oxy أما نهايته B فتنزلق بدون على المحور الشاقولي oz ، M نقطة مادية كتلتها m متوضعة في مركز ثقل القضيب ، المطلوب كتابة معادلة الطاقة الحركية للنقطة؟

الحل:



النقطة A عندما تتحرك ترسم دائرة

قانون الطاقة الحركية

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

نأخذ الاحداثيات الكارتيزية للكرة

طول القضيب $2l$ وبالتالي نصف قطر الكرة هو l

$$x = l \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = l \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = l \cos\theta$$

نشتق الزاوية بالنسبة للزمن وليس الزاوية.

$$x' = l\cos\theta\cos\varphi . \theta' - l\sin\theta\sin\varphi . \varphi'$$

$$y' = l\cos\theta\sin\varphi\ \theta' + l\sin\theta\cos\varphi . \varphi'$$

$$z' = l\sin\theta . \theta'$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = [(l\cos\theta\cos\varphi . \varphi' - l\sin\theta\sin\varphi . \varphi')^2 + (l\cos\theta\sin\varphi\,\theta' + l\sin\theta\cos\varphi . \varphi')^2 + (l\sin\theta . \theta')]^2$$

$$\Rightarrow v^2 = l^2\theta'^2 + l^2\varphi'^2\sin^2\theta$$

لدينا:

ثابت = الطاقة الكامنة + الطاقة الحركية

$$T + U = h$$

$$U = -mg\,z_m$$

$$U = -mg\cos\theta$$

وبالتالي

$$\overbrace{\left[\frac{1}{2}mv^2\right]}^{T} + \overbrace{[-mg\,z_m]}^{U} = h$$

$$\frac{1}{2}m[l^2\theta'^2 + l^2\varphi'^2\sin^2\theta] + [-mg\,\cancel{z_m}\,l\cos\theta] = h$$

لنعين معادلة ... نعمل على المحور الاساسي لحل هذه لنبين المعادلة هو ايجاد
قانون $T=\frac{1}{2}mv^2$ نبحث عن قيمة v^2 ونعوضها ثم نوجد U ونعوض في العلاقة $T+U=h$ حيث
فنحصل على المعادلة

Subject: 2

ونضرب بـ 2

نقسم الطرفين على m فيكون:

$$\ell^2\theta'^2+\ell^2\varphi'^2\sin^2\theta+[-2g\ell\cos\theta]=\frac{2h}{m}$$

يمكن الكتابة بالشكل

$$\ell^2\theta'^2+\ell^2\varphi'^2\sin^2\theta+[-2g\ell\cos\theta]=h_1 \qquad : h_1=\frac{2h}{m}$$

مثال:

بدأت نقطة مادية حركتها من السكون ومن نقطة الأصل بتسارع قدره $\Gamma=ke^{-at}$ حيث k, a ثوابت والمطلوب:

برهن أن سرعة النقطة v وتسارعها Γ تحققان العلاقة التالية وذلك عندما تصبح النقطة في الوضع x.

$$ax=(at-1)v+\Gamma t$$

الحل:

$$\Gamma=\frac{dv}{dt}$$

$$\Gamma=ke^{-at}$$

$$\frac{dv}{dt}=ke^{-at}$$

$$dv=ke^{-at}\,dt$$

بالتكاملة نجد:

$$\Rightarrow v=-\frac{k}{a}e^{-at}+C_1$$

نعين C_1 من شروط البدء

$$t=0 \quad v=0$$

$$\Rightarrow 0=-\frac{k}{a}e^{-a(0)}+C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1=\frac{k}{a}}$$

نعوض قيمة C_1 فيكون:

$$v=-\frac{k}{a}e^{-at}+\frac{k}{a} \quad (1)$$

$$v=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{a}e^{-at}+\frac{k}{a}$$

$$\Rightarrow dx=-\frac{k}{a}e^{-at}\,dt+\frac{k}{a}\,dt$$

Subject: ٣ / /

بالمكاملة نجد:
$$x = +\frac{k}{a^2}e^{-at} + \frac{k}{a}t + C_2$$

نعين C_2 من شروط البدء $x=0, t=0$

$$0 = \frac{k}{a^2}\frac{e^{-a(0)}}{1} + \frac{k}{a}(0) + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{k}{a^2}$$

نعوض فنجد:
$$x = +\frac{k}{a^2}e^{-at} + \frac{k}{a}t - \frac{k}{a^2} \quad (2)$$

من (1) لدينا:
$$av = -ke^{-at} + k \quad (*)$$

ومن $\Gamma = ke^{-at}$ نجد أن
$$\boxed{k = \Gamma e^{at}}$$

نعوض في * (a.r)
$$av = -(\Gamma e^{at}).e^{-at} + \Gamma e^{at}$$
$$av = -\Gamma + \Gamma e^{at}$$

وبالتالي
$$av + \Gamma = \Gamma e^{at}$$

$$\Rightarrow e^{at} = \frac{av + \Gamma}{\Gamma} \quad (3)$$

من العلاقة (2) نضرب الطرفين بـ a فيكون
$$ax = \frac{k}{a}e^{-at} + kt - \frac{k}{a} \quad (4)$$

نعوض قيمة k وقيمة e^{at} فنحصل على المطلوب.

Subject: / /

مثال:

توجد حلقة ثقيلة كتلتها m على سلك دائري أفقي نصف قطره a أعطيت هذه الحلقة سرعة ابتدائية v_0 في اتجاه المماس فإذا علمت أن عامل الاحتكاك يساوي f والمطلوب تعيين المسافة التي قطعتها الحلقة حتى تتوقف.

مثال: تخضع نقطة مادية M لقوة $\vec{F}$ معينة بالعلاقة:

$$F = ma\vec{T} + mfk^2\vec{N}$$

اكتب المعادلات التفاضلية للحركة وأوجد المسار.