3/5/2015 الخامس / ٤ / علي

أثبت أن $\tau=\{\phi, A, A^c, X\}$ حيث $\phi \subsetneq A \neq X$

هي طبولوجي على X و X غير خالية

عيّن الحالات التي يكون فيها (X,τ) متري .

الحل:

τ طبولوجيا على X

① $\phi\ ,\ X \in \tau$

② $\theta_1, \theta_2 \in \tau$ نجد $\theta_1 \cap \theta_2 \in \tau$

إذا كانت θ_1 أو θ_2 خالية $\Leftarrow$ $\theta_1\cap\theta_2 = \phi \in \tau$

إذا كانت θ_1 أو θ_2 تساوي X

فإن $\theta_1 \cap \theta_2 = \theta_2$ أو $\theta_1 \in \tau$

من حال θ_1 ، θ_2 لا تساويان ϕ و X

إما $A = \theta_1$ و $A^c = \theta_2$ $\Leftarrow$ $\theta_1\cap\theta_2 = \phi \in \tau$

$A^c = \theta_1$ و $A = \theta_2$ $\Leftarrow$ $\theta_1\cap\theta_2 = \phi \in \tau$

أو $\theta_1 = \theta_2 = A$ $\Leftarrow$ $\theta_1\cap\theta_2 = A \in \tau$

أو $\theta_1 = \theta_2 = A^c$ $\Leftarrow$ $\theta_1\cap\theta_2 = A \in \tau$

③ $\{\theta_i : i\in I\}\subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I}\theta_i \in \tau$

إذا كانت إحدى المجموعات $\theta_i = X$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i\in I}\theta_i = X \in \tau$

إذا ولا واحدة من المجموعات $\theta_i = X$ إذن إما كل المجموعات

$\theta_i = \phi$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i\in I}\theta_i = \phi \in \tau$

أو هناك مجموعات غير خالية من المجموعات θ_i

إما كل المجموعات غير الخالية تساوي A $\Leftarrow$ $\bigcup_{i\in I}\theta_i = A \in \tau$

١) كل المجموعات الجزئية مـتـا دي $A^c \Leftarrow \tau \ni A = \bigcup_{i\in I}\theta_i$

ا وهناك من المجموعات الجزئية سـا دي

A و $A^c \Leftarrow$

$\bigcup_{i\in I}\theta_i = \phi \cup \phi \dots \cup A \cup \dots \cup A^c \cup \dots = X \in \tau$

الآن نفحص الحالة د :

لنفرض انه يمكن إيجاد مسافة d على X بحيث يكون (X,τ)

فضاء متري مجموعاته المفتوحة هي نفسها المجموعات المفتوحة في (X,d)

رأينا أن المجموعة الوحيدة العنصر $\{a\}$ في فضاء متري تكون مغلقة

ليكن $A \ni a$ وليكن $A^c \ni b$.

$\{a\},\{b\}$ مجموعات مغلقة

وبالتالي $X\setminus\{a\}$ ، $X\setminus\{b\}$ مجموعات مفتوحة

$X\setminus\{a\} \in \tau$ لا يمكن أن تساوي ϕ (لأن $b \in X\setminus\{a\}$)

لا يمكن أن تساوي X

$A \neq X\setminus\{a\}$ وبالتالي $X\setminus\{a\} = A^c$

. بشكل مشابه نرى أن $X\setminus\{b\} = A$

$\{a\} = A \Leftarrow X\setminus\{a\} = A^c$

$\{b\} = A^c \Leftarrow X\setminus\{b\} = A$

$\Rightarrow X = A \cup A^c = \{a, b\}$

وبالتالي إذا كان $2 < |X|$ (عدد نقاط X) فهذا تناقض

إذن الحالة التي يكون من الممكن فيها أن نحصل على فضاء متري هي عندما $|X|=2$

في $(X=\{a,b\}$

$$d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

d	a	b
a	0	1
b	1	0

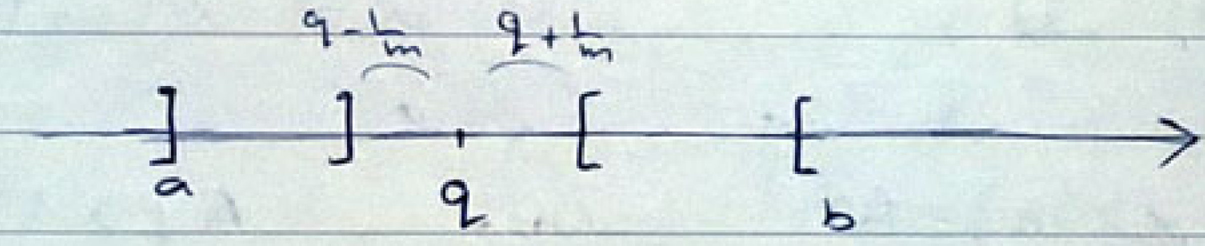
والآن عليك بمحاولة اثبات انها مسافة.

اثبت ان $Q^\circ = \phi$

نفرض انه $q\in Q^\circ$ $\quad \exists q \in R$ ومنه يوجد مجال

$]a,b[$ بحيث $q\in]a,b[$ و $q\in]a,b[\subseteq Q$

$q\in Q$



عليه ايجاد m كبير بشكل كافٍ بحيث ان

$$]q-\tfrac{1}{m},\, q+\tfrac{1}{m}[\ \subseteq\ ]a,b[\ \subseteq Q$$

نعلم ان

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}}_{q_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \notin Q$$

اذن

(متزايدة) $q_n \longrightarrow e$

وبالتالي

$0 < e - q_n \longrightarrow 0$

عليه إيجاد n كبير بشكل كافٍ بحيث يكون

$$0 < e - q_n < \frac{2}{m} = \left(q + \frac{1}{m}\right) - \left(q - \frac{1}{m}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$q - \frac{1}{m} < \underbrace{e - q_n + q - \frac{1}{m}}_{\downarrow} < q + \frac{1}{m}$$

$\bar{\alpha}$ غير كسري

$$\alpha = e - q_n + q - \frac{1}{m} \notin Q$$

لأنه إذا كان $\alpha \in Q \Leftarrow$

$$\alpha + q_n - q + \frac{1}{m} = e \in Q$$

غير صحيح

إذن $Q \not\ni \alpha \in]a, b[$

$\therefore$ $]a, b[\not\subseteq Q$

---

③ ليكن (X, d) فضاء متري ، $A, B \subseteq X$

اثبت أن $\boxed{1}$ $\bar{A} \subseteq \bar{B} \Rightarrow A \subseteq B$.

ملاحظة $A \cup B$ $\Leftarrow$ $\boxed{2}$ $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

$\boxed{3}$ $\bar{A} \cap \bar{B} \supseteq \overline{A \cap B}$

وهات مثال على عدم المساواة

الحل:

الصفات هي

$\bar{A}$ أصغر مجموعة (بمعنى الاحتواء) مغلقة تحوي A.

1] إذا $A \subseteq B$ $\Leftarrow$ $A \subseteq B \subseteq \bar{B}$ $\Leftarrow$ $A \subseteq \bar{B}$

إذن $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

2] $\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{array} \right.$ $\Leftarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array} \right.$ $\Leftarrow$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$$

$\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \\ B \subseteq \bar{B} \end{array} \right.$ $\Leftarrow$ $A \cup B \subseteq \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}_{\text{مغلقة}}$ $\Leftarrow$ $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

"أصغر مجموعة

مغلقة"

تحوي $A \cup B$

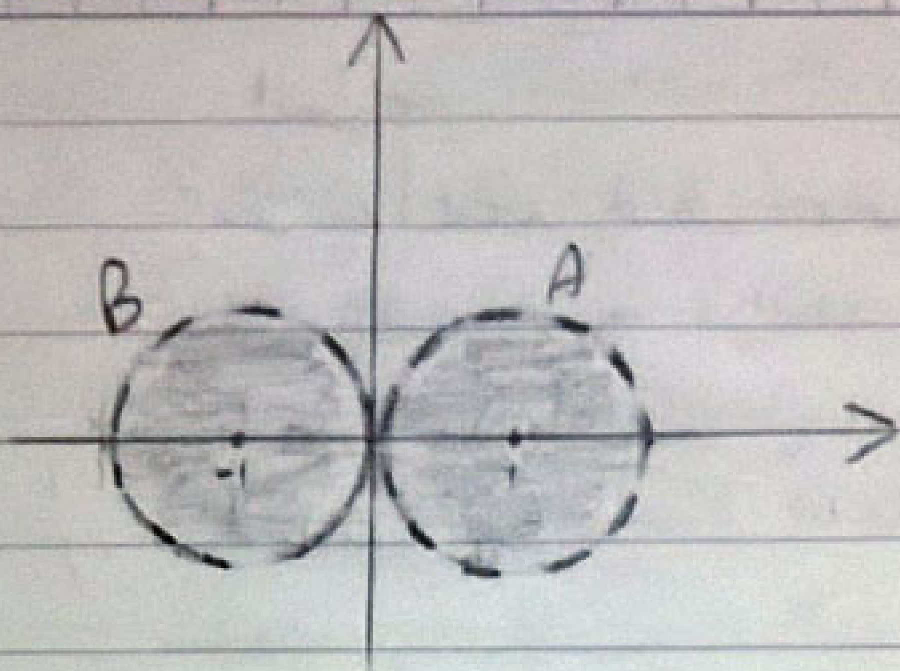
إذن $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3] بما $A \subseteq \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B}$ $\Leftarrow$ $A \cap B \subseteq \underbrace{\bar{A} \cap \bar{B}}_{\text{مغلقة}}$

$\Leftarrow$ $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال عاكس

$$\overline{A \cap B} \subsetneq \bar{A} \cap \bar{B}$$



$(\mathbb{R}^2, d)$

A داخل الدائرة بدون المحيط

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

$A = N((1,0),1)$

$B = N((-1,0),1)$

$\bar{A}$ داخل الدائرة مع المحيط

$\bar{B}$ داخل الدائرة مع المحيط

$$\overline{A\cap B} = \bar{\phi} = \phi \subsetneq \bar{A}\cap\bar{B} = \{(0,0)\}$$

داخلها مع محيطها   الدائرة داخلها مع محيطها

للمرة القادمة:

① هات مثالاً لمجموعة من المجموعات المغلقة في فضاء متري اتحادها ليست مجموعة مغلقة ومجموعة من المجموعات المفتوحة تقاطعها غير مفتوح.

---

② عين لصاقة المجموعة

$$A = \{x \in B[0,1] : t^2 < x(t) \leq t+1\}$$

$$d(x,y) = \sup_{0\leq t\leq 1} |x(t) - y(t)|$$

ارتحت