حركة نقطة خاضعة لقوة $F = -m\frac{k}{r^2}$

هذه القوة هي قوة مركزية جاذبة تتناسب عكساً مع مربع البعد.

- المطلوب إيجاد قانون الحركة المعادلة التفاضلية.

$k = const > 0$

- نستخدم دستور بينيه الثاني:

$$F = -m c^2 u^2 (u'' + u)$$

نعلم أن:

$$u = \frac{1}{r}$$

نعوض في دستور بينيه الثاني فنجد:

$$-mc^2u^2(u''+u) = -m\frac{k}{r^2}u^2 \qquad u = \frac{1}{r} \Rightarrow u^2 = \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow -mc^2u^2(u''+u) = -mku^2$$ نقوم بالاختصار على mc^2 فنجد:

$$\Rightarrow c^2(u''+u) = k \Rightarrow \boxed{u''+u = \frac{k}{c^2}}$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مع طرف ثاني.

الحل العام لها = الحل الخاص مع طرف ثاني + حل عام بدون طرف ثاني.

وبالتالي:

$$u'' + u = 0$$

المعادلة المميزة لها هي:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i \;,\; \lambda_2 = -i$$

وبالتالي الحل العام يعطى بالشكل:

$$u_1 = a\cos(\theta + \alpha)$$

والحل الخاص هو:

$$u' = -a\sin(\theta+\alpha)$$

$$u'' = -a\cos(\theta+\alpha)$$

$$\Rightarrow -a\cos(\theta+\alpha) + a(\cos(\theta+\alpha) = \frac{k}{c^2}$$

Subject:

$$\Rightarrow u_2 = \frac{k}{c^2}$$

عوضنا $u_1 + u_2$ فحصلنا على الحل العام

$$\Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + A\cos(\theta + \alpha)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية حيث α و A ثوابت التكامل.
باختيار مناسب للمحاور القطبية نأخذ: $\alpha = 0$ فيكون:

$$u = \frac{k}{c^2} + A\cos\theta$$

وبالتالي نستخرج $\frac{k}{c^2}$ عامل مشترك فيصبح

$$u = \frac{k}{c^2}\left[1 + A\frac{c^2}{k}\cos\theta\right]$$

وبالتالي: هذه العلاقة تكتب بالشكل:

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}$$

معادلة قطوع $e = A\frac{c^2}{k}$ $P = \frac{c^2}{k}$

حيث P وسيط المسار
e التباعد المركزي

نميز الحالات:

1) إذا كان $e < 1$ فالمسار قطعاً ناقصاً
2) إذا كان $e > 1$ فالمسار قطعاً زائداً
3) $e = 0$ فالمسار دائرة
4) إذا كان $e = 1$ فالمسار قطع مكافئ

حيث:

$$e = A\frac{c^2}{k}$$

$$P = \frac{c^2}{k}$$

Subject: مبدأ حفظ في الأجسام بتحت تأثير القوى المركزية

مثال (1):

أوجد القوة المركزية المؤثرة على نقطة مادية مسارها من الشكل:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

الحل:

نستخدم دستور بينه الثاني:

$$F = -mc^2u^2(u''+u)$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{p}$$

نشتق:

$$u' = -\frac{e\sin\theta}{p} \qquad u'' = \frac{-e\cos\theta}{p}$$

نعوض في دستور بينه الثاني فنجد:

$$F = -mc^2\left[\frac{1+e\cos\theta}{p}\right]^2 + \left[\frac{-e\cos\theta}{p} + \frac{1+e\cos\theta}{p}\right]$$

$$\Rightarrow F = -mc^2\frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2}\left[\frac{1}{p}\right]$$

$$\Rightarrow F = -\frac{mc^2}{p}u^2 \quad (u^2)$$

و.هـ.م

مثال (2)

أوجد القوة المؤثرة على نقطة المادية M مسارها من الشكل:

$$r = a\,e^{-\lambda\theta}$$

الحل:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}e^{\lambda\theta}$$

نشتق:

$$u' = \frac{\lambda}{a}e^{\lambda\theta} \qquad u'' = \frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\theta}$$

Subject:

نعوض في دستور بينه الثاني فنجد:

$$-mc^2u^2\left[\frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\theta}+\frac{1}{a}e^{\lambda\theta}\right]$$

$$=mc^2\left[\frac{1}{a}e^{\lambda\theta}\right]^2\left[\frac{\lambda^2}{a}e^{\lambda\theta}+\frac{1}{a}e^{\lambda\theta}\right]$$

$$=\frac{mc^2}{a^3}e^{3\lambda\theta}\left[1+\lambda^2\right]$$

مثال (3):

أوجد أنه إذا تحركت نقطة مادية على مسار المعطى $r=2a\cos\theta$ تحت تأثير قوة مركزية نحو مركز دوما نحو حيث الدالة فإن هذه القوة هي قوة جاذبة تتناسب عكسا مع القوة الخامسة للبعد أي $\frac{1}{r^5}$

الحل:

$$u=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{1}{2a\cos\theta}$$

من دستور بينه الثاني:

$$F=-mc^2u^2(u''+u)$$

$$u'=\frac{+2a\sin\theta}{2a^2\cos^2\theta}\Rightarrow u'=\frac{\sin\theta}{2a\cos^2\theta}$$

$$u''=\frac{2a\cos^3\theta+4a\sin^2\theta\cos\theta}{(2a)^2\cos^4\theta}\Rightarrow u''=\frac{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}{2a\cos^3\theta}$$

$$u''=\frac{1-\sin^2\theta+2\sin^2\theta}{2a\cos^3\theta}$$

$$u''=\frac{\sin\theta+1}{2a\cos^3\theta}$$

Subject:

نعوض في دستور بينه الثاني فيكون

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{\sin^2\theta + 1}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{2\cos\theta}\right]$$

بعد اتمام الحل والاختصار نحصل على

$$= -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{\cos\theta}\right] = -\frac{mc^2}{r^2} \cdot \frac{8}{9}$$