أصفار تابع عقدي

⊗ ملاحظة:

z_0 صفر لتابع عقدي $f \overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow}$ f تحليلي عند z_0 و $f(z_0)=0$

⊗ لتكن z_0 نقطة شاذة معزولة لـ f عندئذ:

1) z_0 شاذة كاذبة لـ $f \Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ موجودة ومحدودة

2) z_0 قطب لـ $f \Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

3) z_0 شاذة أساسية لـ $f \Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ غير موجود

مبرهنة

إن أصفار تابع تحليلي غير معدوم هي أصفار معزولة.

مثال

$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z - 1$

f تحليلي على $\mathbb{C}$

$z = x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$f(z = x) = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$

⊗ إذا انعدم تابع تحليلي وانعدم على قوس (منحني) في منطقة فهو معدوم على كل المنطقة.

$\xrightarrow{\text{حسب مبرهنة}}$ $f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ويمكن اثبات ذلك على المثال عن طريق القانون

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

ملاحظة: (اصطلاح)

نقول عن نقطة a إنها صفر من المرتبة صفر إذا لم تعدم هذا التابع.

دراسة النقاط الشاذة لحاصل قسمة تابعين تحليليين:

ليكن $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ حيث h, g تحليليان على منطقة G

النقاط الشاذة لـ f هي أصفار $h(z)$ الموجودة في G

لتكن z_0 نقطة شاذة لـ f

$\Leftarrow$ z_0 صفر لـ h $\Leftarrow$ z_0 صفر معزول لـ h

$\Leftarrow$ z_0 ستكون نقطة شاذة معزولة لـ f

لنفرض أن z_0 صفر من المرتبة r لـ h (المقام)

ولنفترض أنه من المرتبة k لـ g (البسط) عندئذ:

1) إذا كانت $r \le k$ $\Leftarrow$ z_0 شاذة كاذبة لـ f

2) إذا كانت $r > k$ فإن z_0 قطب من المرتبة $m=r-k$

الاثبات:

كون التابع تحليلي

$$g(z)=\underset{0}{\underset{\parallel}{g(z_0)}}+\underset{0}{\underset{\parallel}{g'(z_0)}}(z-z_0)+\dots+\underset{0}{\underset{\parallel}{g^{(k-1)}(z_0)}}(z-z_0)^{k-1}+\underset{0}{\underset{\#}{g^{(k)}(z_0)}}(z-z_0)^{k}+\dots$$

$$=(z-z_0)^k\left(g^{(k)}(z_0)+g^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)+\dots\right)$$

$$h(z)=(z-z_0)^r\left(h^{r}(z_0)+h^{r+1}(z_0)(z-z_0)+\dots\right)$$

يتبع ..

انتهت المحاضرة الرابعة