المحاضرة السابعة

(الطوبولوجيا العامة)

1- تعريف الطوبولوجيا

2- طوبولوجيا زارسكي

3- إذا كانت τ_i طوبولوجيا على X فإن $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ طوبولوجيا $i \in I$ على X

4- x نقطة داخلية لـ A $\iff$

$\exists B \in \tau : x \in B \subset A$

نرمز للنقاط الداخلية A°

نتيجة (1) $\text{if } A \in \tau \Rightarrow A = A^\circ$

نتيجة (2) $B \in \tau : B \subset A \subset X \Rightarrow B \subset A^\circ$

5- x نقطة تجمع لـ A $\iff$

$\forall B \in \tau : x \in B \Rightarrow B \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

((إذا كانت $B \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ فإن x ليست نقطة تجمع))

نرمز لنقاط التجمع بـ A' (أو مشتق المجموعة)

نتيجة (1) : إذا كانت (X, τ) فضاء طوبولوجيا

$A, B \subset X$

فإن : 1) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$ (كل نقطة داخلية هي نقطة تجمع)

2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

6- المجموعة المغلقة A $\iff$ $X \setminus A = A^c \in \tau$

ملاحظة : A مغلقة في $(X, \tau) \iff A' \subset A$

الإثبات : نفرض A مغلقة في (X, τ) ولنبرهن أن $A' \subset A$

لنبرهن الشرط بطريقة المكافئ العكسي أي لنبرهن أن ($if\ x \notin A \Rightarrow x \notin A'$) نجم المطلوب:

لنجري الاثبات: $x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

لأن الـ A مغلقة ومنه A^c مفتوحة حيث $x \in A^c$

$\exists B \in \tau \quad : x \in B \subseteq A^c$

جوار (نزرة مفتوحة)

نختار $B = A^c$

$A^c \cap A \setminus \{x\} = \emptyset \Rightarrow x \notin A'$

تم المطلوب

ثانياً: نفرض أن $A' \subset A$ ولنبرهن أن A مغلقة في (X, τ)

الاثبات: يكفي اثبات أن A^c مفتوحة في $(X,\tau) \Leftarrow$ أن A مغلقة في (X, τ)

أي يكفي اثبات هذا الشرط:

$$(\forall x \in A^c , \exists B \in \tau : x \in B \subseteq A^c)$$

نجري الاثبات:

$$\left.\begin{array}{l} x \in A^c \Rightarrow x \notin A \\ A' \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin A'$$

أي أن x ليست نقطة تجمع لـ A

وبالتالي (نعود للتعريف)

$$\exists B \in \tau \quad : x \in B \wedge B \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$$

$x \notin A$ (لأنه نفي) $B \cap A = \emptyset$

$$\Rightarrow x \in B \subseteq A^c$$

إذاً A^c تكون مفتوحة وبالتالي A مغلقة و.هـ.م.

مبرهنة: إذا كانت (X, τ) فضاء طبولوجي فإن:

1) A مغلقة $\Longleftrightarrow A' \subset A$

2) A_i مغلقة $(i=1,2,\dots,n)$ فإن ⇐ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ مغلقة في (X,τ) (الاتحاد المنتهي)

3) A_i مغلقة $i\in I$ ⇐ $\bigcap_{i\in I} A_i$ مغلقة في (X,τ)

---

7 - لصاقة المجموعة A: (•) أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

(••) هي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A

نرمز للصاقة المجموعة A بـ $\bar{A}$

نتائج: إذا كان (X,τ) فضاء طوبولوجي وكانت $A, B, F \subseteq X$

فإن:

1- المجموعة $(\bar{A})$ مغلقة

2- $\bar{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحوي A

3- A مغلقة $\Leftrightarrow A=\bar{A}$

4- $A\subset B \Rightarrow \bar{A}\subset\bar{B}$

5- F مغلقة في (X,τ) تحوي A ⇐ $A\subset\bar{A}\subset F$

6- $A\cup A'$ مغلقة في (X,τ)

7- $\bar{A}=A\cup A'$

8- $\bar{X}=X$, $\bar{\emptyset}=\emptyset$

9- $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$ (لصاقة اللصاقة)

10- $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

11- $\forall B\in\tau:\ x\in B\Rightarrow B\cap A=\emptyset \Leftrightarrow x\in\bar{A}$

(ليست نقطة التجمع)

8- المجموعة الكثيفة في الفضاء الطوبولوجي (X,τ)

A كثيفة في (X,τ) $\Leftrightarrow \bar{A}=X$

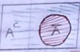
أمثلة:

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

نتائج: إذا كان (X,τ) فضاء طوبولوجي وكانت $A\subseteq X$ فإن:

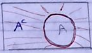
1) $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$

2) $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$



$\bar{A}$ اللصاقة (التي بالأحمر) ← هي الدائرة مع محيطها

$(\bar{A})^c$ بالأخضر



محيط A مع كل A^c

---

[9] خارج المجموعة A: نقول عن نقطة أنها خارجية بالنسبة للمجموعة A إذا كانت داخلية في متممتها

- x نقطة خارجية لـ A $\Leftrightarrow$ x نقطة داخلية لـ A^c

نتيجة: $ext(A) = (A^c)^\circ$

$= (\bar{A})^c$

$ext([a,b[) = ([a,b])^c =]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$

مثال: $X=\{a,b,c\}$

$\tau=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$

أوجد $ext(\{a,b\})$

عناصر τ مفتوحة لذا نأخذ متمم لعناصر τ (لكي نوجد المغلقة)

$\emptyset^c = X$, $X^c=\emptyset$, $\{a\}^c=\{b,c\}$

$\{a,b\}^c=\{c\}$

الحل $ext(\{a,c\}) = (\overline{\{a,c\}})^c = X^c = \emptyset$

(اللصاقة بالنسبة للمجموعة)

$\boxed{10}$ النقاط b المحيطة للمجموعة A نرمز لها بـ $b(A)$

- x نقطة محيطية لـ $A \iff$

$\forall B \in \tau : x \in B \ , \ B \cap A \neq \emptyset \ , \ B \cap A^c \neq \emptyset$

نتائج: إذا كان (X, τ) فضاءً طبولوجياً

$A \subseteq X$

فإن:

1) $b(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$

2) $b(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

3) $A^\circ \cap b(A) = \emptyset$

4) $\bar{A} = A^\circ \cup b(A)$

5) $[b(A)]^c = A^\circ \cup (A^c)^\circ$

امثلة: إذا كان $(\mathbb{R}, \tau)$ الفضاء الطبولوجي المألوف

1) $b(\{1,3,7\}) = \bar{A} \setminus A^\circ$

$= \overline{\{1,3,7\}} \setminus \{1,3,7\}^\circ$

$\bar{1} = 1, \ \bar{3} = 3, \ \bar{7} = 7$

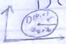
$= \{1,3,7\} \setminus \emptyset = \{1,3,7\}$

2) $b([a,b[) = [a,b] \setminus]a,b[= \{a,b\}$

3) $b(\mathbb{Q}) = \bar{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

مثال: إذا كانت $(\mathbb{R}^2, \tau)$ فضاء مترى

قرص مفتوح



$D(P,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$

$P(x_0, y_0)$

أوجد

1) $b(D(P,r)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$

ح: = بيادي $< \setminus \leq$

2) $b(\Delta) = \Delta$

ح:

مجموعة مفتوحة $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = \Delta \setminus \Delta^\circ = \Delta \setminus \emptyset = \Delta$

$\therefore (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta)^c = \Delta = \overline{A}$

انتهى المقرر

- زينه -