(المحاضرة الخامسة)

الفضاءات الطوبولوجية العامة

مقدمة:

1) تعريف الطوبولوجيا
2) طوبولوجيا زارسكي
- τ_1 طوبولوجيا على X ← $\bigcap_{i\in I} \tau_i$ طوبولوجيا على X
- النقطة الداخلية في المجموعة A° « إذا كانت A مفتوحة فإنها $= A^{\circ}$ »
- نقطة التجمع A' ، المجموعة المغلقة ، لصاقة المجموعة $\bar{A}$
- المجموعة الكثيفة في الفضاء الطوبولوجي ، خارج مجموعة ، محيط مجموعة

نتذكر تعريف الطوبولوجيا:

ليكن لدينا المجموعة X غير الخالية $\emptyset \neq$ وكان τ (تاو) صفاً من اجزاء X نقول عن τ أنه طوبولوجيا (تشكل طوبولوجيا) إذا تحققت الشروط:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\forall A, B \in \tau \Rightarrow A\cap B \in \tau$

3) $\forall A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ (اجتماع غير منتهي)

تذكير
$X = \{a, b, c\}$ مجموعة
$\tau = \{\emptyset, \{a\} \dots$ مجموعة من اجزاء X
$P(X)$ مجموعة جميع اجزاء X

تذكرة عن المعدودة وغير المعدود و المنتهي وغير المنتهي

1) إذا كانت المجموعة $A_1, A_2, \dots, A_n$ (منتهي ومحدودة)
$A\cap B$ (منتهي) ، $A \cup B$ (منتهي)

2) المعدود: إذا وجد تطبيق تقابل بين N و مجموعة جزئية من N
لدينا $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ (معدودة) أي نستطيع سرد العناصر حتى ولو لم نصل إلى الآخر

نضع هنا عناصر $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}^*$	0	1	2	3	4 ...
1	0	1	2	3	4
2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
3	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮					

تمثل $\mathbb{Q}$

إن سرد العناصر في $\mathbb{Q}$ صعب لذلك نلجأ إلى:

أما بالنسبة لـ $\mathbb{R}$ لا يمكن صنع جدول

أي لا نضع

	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	

بينما في $\mathbb{Q}$ نعلم أن البسط $\mathbb{Z}$ والمقام $\mathbb{Z}^*$

٢) غير المنتهية من المجموعات: لا يمكن ان نعتبره محدود أو غير محدود

مثلاً $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ (غير منته محدوده)

مثال: $]a,1[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ (غير منته وغير محدودة)

مثلاً نأخذ $a=0$ (لدي عدد لانهائي من الأعداد

أما $a\in\mathbb{Z}$ هنا أصبح محدود لكن غير منته

- المحدودة يمكن تكون منتهية وغير منتهية

$\alpha \subset \beta \subset \gamma$

غير محدودة محدودة منتهي

(المنتهي محتوى في المحدودة والمحدودة محتوى في الغير محدودة)

كل العناصر إذا كانت منتهي هي محدودة

منتهي ليس بالضرورة محدود

مثلاً: $[1,2]$ محدودة وغير منتهية

$\{1,2,3\}$ محدودة ومنتهية ، $\{a_1,\dots,a_n\}$ منتهي

ملاحظة: (1) $A\in\tau \Leftrightarrow A$ مجموعة مفتوحة في X

2) (X,τ) يسمى فضاءاً طولوجياً

مثال: $X=\{1,2,3\}$

$\tau_1=\{\emptyset,\{1\},\{1,2,3\}\}$ ، $\tau_2=\{\emptyset,X\}$

$\tau_3=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},X\}$

$\tau_4=P(X)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},X\}$

$\tau_5=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

المطلوب: بيّن نوع كلاً من الصفوف $\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5$

أ) إن τ_1 تمثل طوبولوجيا لأن

1) $X,\emptyset\in\tau_1$

2) $\forall A,B\in\tau_1 \Rightarrow A\cap B\in\tau_1$ لأن

$\cap$	$\emptyset$	$\{1\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$
X	$\emptyset$	$\{1\}$	X

$\in\tau_1$

3) $\forall A,B\in\tau_1 \Rightarrow A\cup B\in\tau_1$ لأن

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	X
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	X
X	X	X	X

$\in\tau_1$

ومنه (X,τ_1) طوبولوجيا

ب) τ_2 هي طوبولوجيا تافهة

جـ) $\tau_3=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},X\}$ طوبولوجيا

$\emptyset \quad A \quad A^c \quad X$

د) $\tau_4=P(X)$ وهي الطوبولوجيا المتقطعة (مجموعات مغلقة ومفتوحة في آن واحد)

أما في R فقط $\emptyset$ و R مغلقتان ومفتوحتان في آن واحد

هـ) τ_5 لا تمثل طوبولوجيا لأن $X\in\tau_5$

$X = \mathbb{R}$

$\tau = \{A : A \subseteq R : \forall x \in A \Rightarrow \exists a, b \in R : x \in]a, b[\subset A\}$

يوجد جوار لـ x محتوى في A

جمع المجموعات المفتوحة في R هي طبولوجيا على R (طبولوجيا المألوفة)

حيث أن X ، $\emptyset$ مجموعتان مفتوحتان

تقاطع أي اجتماع مجموعتين مفتوحتين هو مفتوح . اجتماع عدد غير منتهي للمجموعات المفتوحة هو مفتوحة

(مناسب تطبيقها على المحور)

$P(x, y)$ $X = \mathbb{R}^2$

$\tau = \{A : A \subset \mathbb{R}^2 : \forall P \in A , \exists D_r(P) : P \in D_r(P) \subset A\}$

قرص

$\exists r > 0 : P \in D_r(P) \subset A$: يمكن التعبير عنه بأنه

(مناسب تطبيقها على المستوى)

$P(x, y, z)$ $X = \mathbb{R}^3$

$\tau = \{A : A \subseteq \mathbb{R}^3 : \forall P \in A , \underset{\text{كرة مفتوحة}}{\exists B_r(P)} : P \in B_r(P) \subset A\}$

(مناسب تطبيقها على الفراغ)

طبولوجيا زارسكي على X :

إذا كانت X غير منتهية و τ صفاً من اجزاء X

حيث $1) \emptyset \in \tau$

★ $2) A \in \tau \Leftrightarrow A^c$ منتهية ($A \in \tau$ إذا وفقط إذا A^c منتهية)

هل τ تمثل طبولوجيا زارسكي ؟

1) $X \in \tau$ لأن $\underset{\text{لأن } \emptyset \text{ منتهية}}{X^c = \emptyset} \in \tau$

2) $A, B \in \tau$ المطلوب التقاطع ينتمي لـ τ

إن كل من A^c ، B^c مستقر نأخذ

حسب دومرغان $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

إن $A^c \cup B^c$ مغلق (A^c و B^c مغلق) وبالتالي $A \cap B \in \tau$ حسب (*)

3) $\forall A_i \in \tau$ المطلوب هو أن اجتماع A_i ينتمي لـ τ

$\underset{i \in I}{\underset{\text{مغلق}}{A_i^c}} \Longrightarrow \underset{i \in I}{\underset{\text{مغلق}}{\bigcap A_i^c}}$

(A_1^c ، A_2^c ، ...) كل منها مستقر ومنه التقاطع مغلق

$\bigcap_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcup A_i \right)^c$

حسب قانون دومرغان (متمم الاجتماع هو تقاطع المتممات) $\Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

النقطة الداخلية لمجموعة A ، إذا كان (X, τ) فضاءاً طبولوجياً

وكانت $A \subseteq X$ نقول عن النقطة X إنها داخلية للمجموعة A ، إذا كان

(x نقطة داخلية لـ A) $\overset{\text{يكافئ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists B \in \tau : x \in B \subset A)$

مجموعة مفتوحة

((أما النقطة الداخلية في $\mathbb{R}$: إذا وجد مجال مفتوح ? بحيث هذه النقطة تنتمي

إليه و محتوى في المجموعة)) ، لو كانت $A \in \tau$ فتصبح كل نقاطها داخلية

نقطة التجمع لمجموعة A : إذا كان (X, τ) فضاءاً طبولوجياً

وكانت $A \subseteq X$ نقول عن النقطة x إنها نقطة تجمع لـ A إذا كان :

$\forall B \in \tau : x \in B$

ويحقق الشرط : $B \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

المجموعة المغلقة : إذا كان (X, τ) فضاءاً طبولوجياً وكانت

$A \subseteq X$ نقول عن القطعة x إنها مغلقة إذا كانت متممتها مفتوحة .

(A مغلقة في (x, τ)) $\Longleftrightarrow X \setminus A \in \tau$

أو $A^c \in \tau$

لصاقة المجموعة : نقول عن $\bar{A}$ لصاقة للمجموعة A حيث $\bar{A}$ تمثل تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A

مثلا $A =]1,2[\Leftarrow \bar{A} = [1,2]$

$$\bar{A} = A \cup \underbrace{A'}_{\text{نقاط التجمع}}$$

المجموعة الكثيفة : نقول عن المجموعة A أنها كثيفة في X إذا كانت $\bar{A} = X$

ن : # $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$