مثال:

$$\mathbb{R} = (\mathbb{Z}(i), +, \cdot)$$

$$\varepsilon : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\forall x = a+bi \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad : \varepsilon(x) = |a^2+b^2|$$

نثبت $\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists q, r \quad : x =$

$$x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad : x \cdot y^{-1} \in \mathbb{Q}(i)$$

$$x \cdot y^{-1} = a+bi \in \mathbb{Q}(i) \quad , a, b \in \mathbb{Q}$$

$a, b \in \mathbb{Q}$ يوجد عدد من صحيح أقرب إليها بالقيمة المطلقة

$$\exists n, m \in \mathbb{Z} \quad ; |a-n| \leq \frac{1}{2} \quad , |b-m| < \frac{1}{2}$$

$$x y^{-1} = (n+mi) + [(a-n) + (b-m)i]$$ حيث فرضنا

$$x = \underbrace{(n+mi)y}_{q} + \underbrace{((a-n)+(b-m)i)y}_{= r \in \mathbb{Z}[x]}$$

$$x = qy + r$$

$r = 0$ تم المطلوب

$r \neq 0$ فإن:

$$|((a-n)+(b-m)i)y|^2 = |(a-n)^2 + (b-m)^2|$$

$$\varepsilon(y) \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\varepsilon(y) = \frac{1}{2}\varepsilon(y) < \varepsilon(y)$$

$$\varepsilon(r) < \varepsilon(y)$$

وبالتالي $(\mathbb{Z}(i), +, \cdot)$ هي ED أي منطقة مثاليات رئيسية

أي منطقة تحليل وحيد

الفصل السادس: الحلقات النوثرية و الآرتينية

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية (واحدية)

1 - نقول أن R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة (a.c.c) asending chain condition

إذا وفقط إذا كان من أجل أي سلسلة متزايدة من المثاليات في R

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$

يوجد n عدد طبيعي $\in N$

$\exists n \in N \; ; \; \forall i \geq n : \quad I_n = I_i$

2 - نقول أن R حلقة نوثرية إذا وفقط إذا كانت R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة.

أمثلة: 1) كل حقل هو حلقة نوثرية

أي $(R, \mathbb{Q}, \mathbb{C})$

2) كل حلقة منتهية هي حلقة نوثرية مثلاً:

(حلقة نوثرية) $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \geq 1$

3) كل منطقة مثاليات رئيسية حلقة نوثرية

- لتكن R هي PID

سلسلة متزايدة من المثاليات في R $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$

بدي اثبت أن السلسلة تنقطع

$$I = \bigcup_{i \geq 1} I_i \trianglelefteq R$$

مثالي في R حسب علاقة الاحتواء، بما أن R منطقة مثاليات رئيسية تكون I مثالي رئيسي

$\exists a \in R ; I = \langle a \rangle$

$\exists i_0 \in N ; a \in I_{i_0} \Longrightarrow \langle a \rangle \subseteq I_{i_0}$

$\Longrightarrow I = I_{i_0}$

$\exists i_0 \in N ; \forall i \geq i_0 : I_i = I_{i_0}$

وهذا يعني أن R تحقق (a.c.c)

وبالتالي R حلقة نوترية

4) إذا $F\{x_i : i \in N\} = R$ حيث F حقل

$= \cup F[x_1, x_2, \dots x_n]$

R) هي حلقة حدوديات بـ ∞ متحول معرفة على حقل F

لكن لن تكون R ليست نوترية

وذلك لأنه توجد سلسلة لا تنقطع

$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subsetneq \dots$

5) R حقل فإن $\mathbb{R}^n$ حلقة نوترية

6) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ ، $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$

؛ $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$

إن كل منهم حلقات نوترية وذلك حسب ترتيب سابق:

$\mathbb{R}$ حقل $\Longleftrightarrow R[x]$ PID و 3

ملاحظة: إذا كانت $\mathbb{R}$ حلقة تبديلية فإن القضايا التالية متكافئة:

1) R نو

2) كل مثالي في R منتهي التوليد في R

٢) كل مجموعة غير خالية من المثاليات تملك عنصر أعظم

الإثبات:

1) ← 2) $I \trianglelefteq R$

إذا كان $i = \langle 0 \rangle$ تم المطلوب

$i \neq \langle 0 \rangle$ فإنه

$$\Rightarrow \exists a_1 \in I \quad , \quad \langle a_1 \rangle \subseteq I$$

$I = \langle a_1 \rangle$ إذا كان صحيح تم المطلوب

وإذا كان $I \neq \langle a_1 \rangle$ فإنه

$$\exists a_2 \in I \ , \ a_2 \in \langle a_1 \rangle$$

$$\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1 , a_2 \rangle \subseteq I$$

$$I = \langle a_1 , a_2 \rangle$$

إذا لم يكن $I \neq <$

نكرر هذه العملية n مرة فنحصل على سلسلة متصاعدة من المثاليات في $\mathbb{R}$:

$$\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1 , a_2 \rangle \subseteq$$

وبما أن R نوثرية فإن هذه السلسلة تنقطع

$$\exists m \in \mathbb{N} \ ; \ \forall i \geq m \ : \ I_i = I_m$$

حيث $I_i = \langle a_1 , a_2 , \dots a_{i-1} , a_i \rangle$

$$I_m = \langle a_1 , a_2 , \dots , a_m \rangle$$

وبالتالي

$$I = I_m = \langle a_1 , a_2 , \dots , a_m \rangle$$

أي I منتهي وهو المطلوب

2) ← 3) لتكن S مجموعة غير خالية من المثاليات في R
كون $S \neq \emptyset$ حسب الفرض.

$S \neq \emptyset \Rightarrow \exists I_1 \in S$

إذا كان I_1 أعظم يتم المطلوب

إذا لم يكن I_1 أعظم فإنه

$\exists I_2 \in S \ , \ I_1 \subseteq I_2$

إذا I_2 أعظم يتم

إذا لم يكن I_2 أعظم

$\exists I_3 \in S \ , \ I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3$

نكرر هذه العملية n مرة فنحصل

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$

بما أن كل مثالي في R منتهي التوليد فيوجد

$\exists a_1, a_2, \dots, a_t \in R \ ; \ I = \langle a_1, a_2, \dots a_t \rangle$

وبالتالي يوجد مثالي واحد هو I

$\exists I = \cup I_i \dots \exists b_1, b_2, \dots b_s$

$I = \langle b_1, b_2, \dots b_s \rangle$

$\exists i \in \mathbb{N} \ ; \ b_1, b_2, \dots b_s \in I_i$

$\Rightarrow \langle b_1, b_2, \dots b_s \rangle \subseteq I_i$

$\Rightarrow I = I_i$

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ (1 ⇐ 3)

سلسلة متزايدة من المثاليات في R

عندئذٍ نكوّن:

$S = \{ I_i : i \in \mathbb{N} \}$

$S \neq \emptyset$

حسب الفرض أي مجموعة من المثاليات تحوي

عنصر أعظم

أي يوجد عنصر أعظم في S

$\exists j \in \mathbb{N}; \ \forall i \geq j : I_i = I_j$

أي أن السلسلة تتقطع

أي R حلقة نوثرية

مبرهنة: إذا كانت R حلقة تبديلية (واحدية)

فإن القضايا التالية متكافئة:

1) R حلقة نوثرية

2) كل مثالي أولي في R منتهي التوليد

(بدون برهان)

لتكن R حلقة تبديلية واحدية.

إذا كان كل مثالي أعظمي في R مولد بعنصر

وحيد حقق:

أي إذا كان $\mathcal{I} = \langle a \rangle \in \mathcal{I}\text{-}Spec(R)$

حيث $a^2 = a$ فإن R نوثرية

الإثبات: ليكن P مثالي أولي ، $P \in Spec(R)$

ومنه فإن $P \subsetneq R$

حسب $\exists \mathcal{M} \triangleleft_{\max} R \; ; \; P \subseteq \mathcal{M}$

حسب الفرض :

$$\Rightarrow \exists\, a \in R \; ; \; a = a^2 \; , \; \mathcal{M} = \langle a \rangle$$

بالنسبة الصفر:

$$0 = a - a = a^2 - a = a(a-1) \in P$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \in P \;\vee\; a-1 \in P}_{(\text{لأنه مثالي أولي})}$$

نفرض جدلاً إذا كان $a-1 \in P \subseteq \mathcal{M}$

فإن $\underbrace{1}_{\notin \mathcal{M}} = \underbrace{a}_{\mathcal{M}^c} - \underbrace{(a-1)}_{\in \mathcal{M}}$

ومنه $a - 1 \notin P \Rightarrow a \in P$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \langle a \rangle \subseteq P$$

$$P = \mathcal{M} = \langle a \rangle$$

أي أن أي مثالي أولي في R منتهي التوليد ومنه

وحسب المبرهنة السابقة R حلقة نوثرية

مبرهنة: إذا كانت R حلقة نوثرية و $I \trianglelefteq R$

فإن $\Rightarrow \underbrace{R \setminus I}_{\text{حلقة القسمة}}$ نوثرية

<u>الإثبات</u> : تزايدية $I_1/I \subseteq I_2/I \subseteq \dots$

سلسلة متصاعدة من المثاليات في $R\backslash I$

إذن ليكن: $\pi : R \to R/I$

$$\pi(r) = r + I$$

تشاكل الغمر القانوني

$i \in \mathbb{N} : \quad \pi^{-1}(I_i/I) = I_i$

$$\pi^{-1}(I_1\backslash I) \subseteq \pi^{-1}(I_2/I) \subseteq \dots$$

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

بما أن R نوثرية فإن السلسلة تتوقف

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n : I_n = I_i$

$\exists n \in : \forall i \geq n : I_n/I = I_i/I$

وبالتالي تكون السلسلة المتصاعدة من المثاليات

في $R\backslash I$ تتوقف ومنه $R\backslash I$ حلقة نوثرية

نتيجة: إذا كانت R نوثرية و $\varepsilon : R \to S$ فإن

$\varepsilon(R)$ حلقة نوثرية

<u>الإثبات</u>:

$$R/\ker\varepsilon \cong Im(\varepsilon) = \varepsilon(R)$$

$$I := \ker(\varepsilon) \trianglelefteq R$$

وبالتالي $\varepsilon(R)$ نوثرية

الإثبات: لتكن R حلقة تبديلية، $I \trianglelefteq R$. إذا كانت R/I و I حلقات نوثرية فإن R نوثرية

بتشبيه إثبات القاعدة تم الإثبات

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية.

1) نقول أن R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة (D.C.C) إذا وفقط إذا كان ما أصل أي سلسلة متناقصة من المثاليات في R:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \; ; \; \forall i \geq n \; : \; I_n = I_i$$

2) نقول أن R حلقة آرتينية إذا كان R تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة

أمثلة:

1) كل حقل حلقة آرتينية

2) كل حلقة منتهية حلقة آرتينية:

مثلاً $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ $\forall n \geq 1$

3) إن $\mathbb{Z}$ ليست آرتينية أي $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ليست آرتينية وذلك لأن: مثلاً

$$\langle 2 \rangle \underset{\neq}{\supseteq} \langle 2^2 \rangle \underset{\neq}{\supseteq} \langle 2^3 \rangle \underset{\neq}{\supseteq} \dots$$

سلسلة متناقصة لا تنقطع