نظرية الفئات

المحاضرة الحادية عشرة

٢٠/٤/٢٠١٥

تكافؤ الفئات

تمهيدية: ليكن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ فئات.

ولنفرض أن: $T: \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$, $F, G: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ دوال مباشرة.

إذا كان $\eta: F \longrightarrow G$ مورفيزماً دالياً، عندئذٍ:

يوجد مورفيزم دالي: $T.\eta : T.F \longrightarrow T.G$

معرف بالشكل: $\forall A \in ob(\mathcal{C}_1): T.\eta(A) = T(\eta(A))$

$$\boxed{\underbrace{T(\underbrace{\eta(A)}_{\text{مورفيزم للفئة } \mathcal{C}_2})}_{\text{مورفيزم للفئة } \mathcal{C}_3}}$$

الإثبات: وجدنا سابقاً أن كل من:

$T.F, T.G: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_3$

دوال مباشرة.

- ليكن $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ عندئذٍ فإن: $\eta(A): F(A) \longrightarrow G(A)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$، أي ينتمي إلى منطلق تطبيق المورفيزمات T، وبالتالي يمكن أخذ صورته وفق T، ويكون:

$$T(\eta(A)) : T(F(A)) \longrightarrow T(G(A))$$

مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_3$ (مستقر T).

وحسب تعريف $T.\eta$ يكون لها الشكل:

$$T.\eta(A): T.F(A) \longrightarrow T.G(A)$$

- ليكن $W: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$.

ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
T.F(A) \arrow[r, "T.\alpha(A)"] \arrow[d, "T.F(w)"'] \arrow[dr, phantom, "\star"] & T.G(A) \arrow[d, "T.G(w)"] \\
T.F(B) \arrow[r, "T.\alpha(B)"] & T.G(B)
\end{tikzcd}$$

أي نريد برهان أن :

$$T.G(w) \,.\, T.\alpha(A) = T.\alpha(B) \,.\, T.F(w)$$

* لما كان α مورفيزماً دالياً ، ولدينا $w \in \mathcal{C}_1(A,B)$ ، فإن المخطط الآتي :

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha(A)"] \arrow[d, "F(w)"'] & G(A) \arrow[d, "G(w)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha(B)"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

تبديلي ، أي :

$$G(w) \,.\, \alpha(A) = \alpha(B) \,.\, F(w)$$

إن طرفي العلاقة الأخيرة هما مورفيزمات في الفئة $\mathcal{C}_2$ ، لنأخذ صورتيهما وفق T :

$$T(G(w) \,.\, \alpha(A)) = T(\alpha(B) \,.\, F(w))$$

$$T(G(w)) \,.\, T(\alpha(A)) = T(\alpha(B)) \,.\, T(F(w))$$

$$T.G(w) \,.\, T.\alpha(A) = T.\alpha(B) \,.\, T.F(w)$$

وهذا يبين أن المخطط ★ تبديلي .

مما سبق نجد أن $T.\alpha$ مورفيزم دالي ، وهو المطلوب .

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ فئات.

ولنفرض أن: $T: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ ، $F, G: \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_3$ دوال مباشرة.

إذا كان $\Psi: F \longrightarrow G$ مورفيزماً دالياً، عندئذٍ:

يوجد مورفيزم دالي: $\Psi . T : F.T \longrightarrow G.T$

معرف بالشكل: $\forall A \in ob(\mathcal{C}_1) : \Psi . T(A) = \Psi(T(A))$

$$\boxed{\underbrace{\Psi(\underbrace{T(A)}_{\text{شيء للفئة } \mathcal{C}_2})}_{\text{مورفيزم للفئة } \mathcal{C}_3}}$$

الإثبات: وجدنا سابقاً أن كلاً من:

$F.T , G.T : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_3$

دوال مباشرة.

- ليكن $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ عندئذٍ فإن $T(A) \in ob(\mathcal{C}_2)$

أي أن $T(A)$ ينتمي إلى منطلق تطبيقي المورفيزمات F, G

وبالتالي يمكن أخذ صورته وفقهما: $F(T(A)) , G(T(A))$

وهي أشياء للفئة $\mathcal{C}_3$.

وبما أن Ψ مورفيزم دالي فإن:

$$\Psi(T(A)) : F(T(A)) \longrightarrow G(T(A))$$

وهو مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_3$، وحسب تعريف $\Psi . T$ يكون له الشكل:

$$\Psi . T(A) : F.T(A) \longrightarrow G.T(A)$$

- ليكن $w: A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$.

ولنبرهن أن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
F.T(A) \arrow[r, "\Psi . T(A)"] \arrow[d, "F.T(w)"'] \arrow[dr, phantom, "\star"] & G.T(A) \arrow[d, "G.T(w)"] \\
F.T(B) \arrow[r, "\Psi . T(B)"'] & G.T(B)
\end{tikzcd}$$

أي نريد برهان أن:

$$G.T(\omega) \,.\, \Psi.T(A) = \Psi.T(B) \,.\, F.T(\omega)$$

طالما أن $\omega : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$ فإن المورفيزم:

$T(\omega) : T(A) \longrightarrow T(B)$ هو مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$.

ومنه فالمورفيزمان: $F(T(\omega)) : F(T(A)) \longrightarrow F(T(B))$

$G(T(\omega)) : G(T(A)) \longrightarrow G(T(B))$

هما مورفيزمان للفئة $\mathcal{C}_3$.

لما كان Ψ مورفيزماً دالياً، ولدينا $T(\omega) \in Mor(\mathcal{C}_2)$، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
F(T(A)) \arrow[r, "\Psi(T(A))"] \arrow[d, "F(T(\omega))"'] & G(T(A)) \arrow[d, "G(T(\omega))"] \\
F(T(B)) \arrow[r, "\Psi(T(B))"] & G(T(B))
\end{tikzcd}$$

تبديلي، أي:

$$G(T(\omega)) \,.\, \Psi(T(A)) = \Psi(T(B)) \,.\, F(T(\omega))$$

$$\Rightarrow G.T(\omega) \,.\, \Psi.T(A) = \Psi.T(B) \,.\, F.T(\omega)$$

وهذا يبين أن المخطط ★ تبديلي.

مما سبق نجد أن $\Psi.T$ مورفيزم دالي.

/ /

تعريف:

ليكن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ فئتين، وليكن $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ دالي مباشر.

نقول إن F هو تكافؤ فئات إذا وجد:

- دالي مباشر: $G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$
- وإيزومورفيزمات دالية:

$$\varphi : I_{\mathcal{C}_1} \longrightarrow G.F$$

$$\psi : I_{\mathcal{C}_2} \longrightarrow F.G$$

تحقق: $F.\varphi = \psi.F$

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ فئتين، وليكن $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ دالي مباشر

إذا كان F تكافؤ فئات، عندئذٍ:

١- أياً كان $A, B \in ob(\mathcal{C}_1)$ فإن التطبيق:

$$F(A,B) : \mathcal{C}_1(A,B) \longrightarrow \mathcal{C}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر.

٢- أياً كان $X \in ob(\mathcal{C}_2)$ يوجد $Y \in ob(\mathcal{C}_1)$ بحيث:

$$F(Y) \cong X$$

ملاحظة: نعلم أن الدالي المباشر F مؤلف من تطبيق أشياء وتطبيق مورفيزمات.

* إن البند الأول من المبرهنة يتحدث عن تطبيق المورفيزمات بأنه سيكون متبايناً وغامراً إذا كان F تكافؤ فئات.
واختصاراً سنكتب F بدلاً من $F(A,B)$.
* أما البند الثاني فيتحدث عن تطبيق الأشياء، حيث لأجل كل شيء X من $\mathcal{C}_2$ سيوجد شيء Y من $\mathcal{C}_1$ بحيث يتماثل $F(Y)$ مع X (أي يوجد إيزومورفيزم بينهما) (يشبه هذا الأمر تعريف الغمر ولكنه مختلف قليلاً)

البرهان : 1) واضح أن $F(A,B)$ تطبيق.

* إثبات التباين:

ليكن $u, v \in \mathcal{C}_1(A,B)$ بحيث:

$$\left(F(A,B)(u) = F(A,B)(v)\right) \qquad F(u) = F(v)$$

بما أن F تكافؤ فإنه يوجد دالي مباشر: $G : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$

وإيزومورفزمات دالية:

$$\varphi : I_{\mathcal{C}_1} \longrightarrow G.F$$
$$\psi : I_{\mathcal{C}_2} \longrightarrow F.G$$

تحقق:

$$F.\varphi = \psi.F$$

لدينا: $G.F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_1$

ومنه يكون: $G.F(u) = G.F(v)$

- بما أن φ مورفيزم دالي فإن:

أولا: من أجل المورفيزم $u : A \longrightarrow B$ يكون المخطط:

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{C}_1}(A) = A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "I_{\mathcal{C}_1}(u) = u"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(u)"] \\
I_{\mathcal{C}_1}(B) = B \arrow[r, shift left, "\varphi(B)"] & G.F(B) \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}(B)"]
\end{tikzcd}$$

تبديلي، أي أن: $G.F(u) \cdot \varphi(A) = \varphi(B) \cdot u$ ⊛

ثانياً: لأجل المورفيزم $\nu : A \longrightarrow B$ فإن المخطط:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
I_{\mathcal{C}_1}(A) = A \arrow[r, "\mu(A)"] \arrow[d, "I_{\mathcal{C}_1}(\nu) = \nu"'] & G.F(A) \arrow[d, "G.F(\nu)"] \\
I_{\mathcal{C}_1}(B) = B \arrow[r, shift left, "\mu(B)"] & G.F(B) \arrow[l, shift left, "\mu^{-1}(B)"]
\end{tikzcd}$$

تبديلي، أي: (**) $G.F(\nu) . \mu(A) = \mu(B) . \nu$

- بما أن μ إيزومورفيزم دالي فإن $\mu(A)$ إيزومورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$ وذلك أياً كانت $A \in ob(\mathcal{C}_1)$
ومنه فإن $\mu(B)$ إيزومورفيزم وبالتالي يوجد مورفيزم $\mu^{-1}(B)$
بحيث: $\mu^{-1}(B) . \mu(B) = I_B$

شرح لماذا $\mu(A)$, $\mu(B)$ إيزومورفيزمات؟

- ليكن لدينا الداليان: $F, G : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$
وليكن الإيزومورفيزم الدالي: $\mu : F \longrightarrow G$
وبالتالي يوجد مورفيزم دالي: $\psi : G \longrightarrow F$
بحيث يكون: $\mu . \psi = I_G$, $\psi . \mu = I_F$
- ليكن $A \in ob(\mathcal{C}_1)$ عندئذٍ:

$$\psi . \mu(A) = I_F(A) \Longrightarrow \psi(A) . \mu(A) = I_{F(A)}$$
$$\mu . \psi(A) = I_G(A) \Longrightarrow \mu(A) . \psi(A) = I_{G(A)}$$

ومنه فإن $\mu(A)$ إيزومورفيزم $\forall A \in ob(\mathcal{C}_1)$

لنضرب طرفي العلاقتين ⊛ و ⊛⊛ من اليسار بـ $\varphi^{-1}(B)$ فنجد:

$$\varphi^{-1}(B) \cdot GF(u) \cdot \varphi(A) = u$$
$$\varphi^{-1}(B) \cdot GF(v) \cdot \varphi(A) = v$$

ولكن لدينا $GF(u) = GF(v)$ وبالتالي نجد أن $u = v$

ومنه فالتطبيق $F(A, B)$ متباين.

* إثبات الغمر:

لنأخذ: $u : F(A) \longrightarrow F(B)$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_2$

لأن مستقر F

عندئذٍ: $G(u) : G(F(A)) \longrightarrow G(F(B))$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$.

لنشكل المورفيزم: $w = \varphi^{-1}(B) \cdot G(u) \cdot \varphi(A)$

مورفيزمات للفئة $\mathcal{C}_1$

كما هو موضح في المخطط:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi(A)"] \arrow[d, "w"'] & G(F(A)) \arrow[d, "G(u)"] \\
B \arrow[r, shift left, "\varphi(B)"] & G(F(B)) \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}(B)"]
\end{tikzcd}$$

فنجد أن $w : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}_1$ (من المنطلق)

ولنثبت أن: $F(w) = u$

ALADIIB.net

* بما أن Ψ مورفيزم دالي فإنه لأجل المورفيزم : $u : F(A) \longrightarrow F(B)$

فإن المخطط الآتي :

$$\begin{tikzcd}
I_{\mathcal{C}_2}(F(A)) = F(A) \arrow[r, "\Psi(F(A))"] \arrow[d, "I_{\mathcal{C}_2}(u) = u"'] & F.G(F(A)) \arrow[d, "F.G(u)"] \\
I_{\mathcal{C}_2}(F(B)) = F(B) \arrow[r, "\Psi(F(B))"] & F.G(F(B))
\end{tikzcd}$$

تبديلي أي :

$$\Psi(F(B)).u = F.G(u).\Psi(F(A))$$
$$(\Psi.F)(B).u = F.G(u).(\Psi.F)(A)$$
$$F.\varphi(B).u = F.G(u).F.\varphi(A) \quad \dots \boxed{1}$$

$$\begin{aligned}
* \quad F(w) &= F(\varphi^{-1}(B).G(u).\varphi(A)) \\
&= F(\varphi^{-1}(B)).F(G(u)).F(\varphi(A)) \\
&= F(\varphi^{-1}(B)).F.G(u).F.\varphi(A) \\
&= F(\varphi^{-1}(B)).F.\varphi(B).u \qquad \text{من } \boxed{1} : \\
&= F(\varphi^{-1}(B)).F(\varphi(B)).u \\
&= F(\varphi^{-1}(B).\varphi(B)).u = F(I_B).u \\
&= I_{F(B)}.u = u
\end{aligned}$$

ومنه $F(A,B)$ غامر

ج) ليكن $X \in ob(\mathcal{C}_2)$ عندئذٍ $G(X) \in ob(\mathcal{C}_1)$

لنضع $Y = G(X)$.

بما أن Ψ إيزومورفيزم دالي (تماثل) فإن : $X \cong F.G(X)$

وبالتالي : $F(Y) = F(G(X)) = F.G(X) \cong X$

وهو المطلوب.

ALADID.net