

نظرية الفئات

المحاضرة الحادية عشرة

٤/٤/٥٠

تكايف الفئات

تبريدية: لنكن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ فئات. ولنفرض أن: $T: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_3$, $F, G: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ دوال مباشرة. إذا كانت \mathcal{A} مورفيزماً دالياً، عندئذٍ يوجد مورفيزم دالي: $T \circ \mathcal{A}: T \circ F \rightarrow T \circ G$ معرفته بالشكل: $\forall A \in \text{ob}(\mathcal{A}_1): T(\mathcal{A}(A)) = T(\mathcal{A}(F(A)))$

$T(\mathcal{A}(A))$
مورفيزم الفئة \mathcal{A}_3
مورفيزم الفئة \mathcal{A}_2

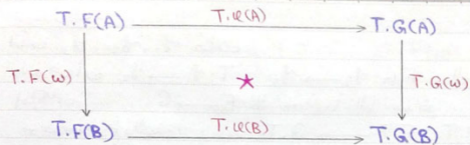
البيئات: وجدنا سابقاً أن كل من: $T: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_3$, $F, G: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ دوال مباشرة.

- ليكن $\mathcal{A} \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ عندئذٍ نعلم: $\mathcal{A}(A): F(A) \rightarrow G(A)$ مورفيزم الفئة \mathcal{A}_2 ، أي ينتمي إلى منطلق تطبيق المورفيزمات T ، وبالتالي يمكن أخذ صورته وفق T ، ويكون:

$T(\mathcal{A}(A)): T(F(A)) \rightarrow T(G(A))$
مورفيزم الفئة \mathcal{A}_3 (مستقر T).
و حسب تعريف $T \circ \mathcal{A}$ يكون لصالته:

$$T \circ \mathcal{A}(A): T \circ F(A) \rightarrow T \circ G(A)$$

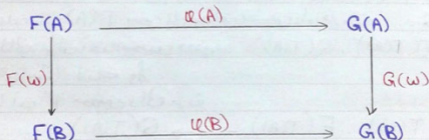
- ليكن $\mathcal{A}: A \rightarrow B$ مورفيزم الفئة \mathcal{A}_1 . ولنبرهن على أن المخطط الآتي تبدلي:



أي نريد برهان أنه :

$$T.G(w) \cdot T.u(A) = T.u(B) \cdot T.F(w)$$

* لما كان u مورفيزاً دالياً ، ولدينا $w \in \mathcal{A}_1(A, B)$ ، فإن المخطط الآتي :



$$G(w) \cdot u(A) = u(B) \cdot F(w) \quad \text{تبدلي ، أي :}$$

إن طرفي العلاقة الأخيرة هما مورفيزمات في الفئة \mathcal{A}_2 ، لذا نأخذ صورهما وفق T :

$$T(G(w) \cdot u(A)) = T(u(B) \cdot F(w))$$

$$T(G(w)) \cdot T(u(A)) = T(u(B)) \cdot T(F(w))$$

$$T.G(w) \cdot T.u(A) = T.u(B) \cdot T.F(w)$$

وهذا يبين أن المخطط * تبدلي

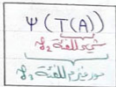
مناسبق نجد أن $T.u$ مورفيزم دالي ، وهو المطلوب .

تبادلية:

لتكن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ فئات .
 ولنفرض أن: $T: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$, $F, G: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_3$ دوال مباشرة
 إذا كان $\Psi: F \rightarrow G$ مورفيزماً دالياً، عندئذٍ:

يوجد مورفيزم دالٍ $\Psi.T: F.T \rightarrow G.T$

صرف بالكل: $\forall A \in \text{ob}(\mathcal{A}_1) : \Psi.T(A) = \Psi(T(A))$



البيانات: وجدنا سابقاً أن كل من:

$F.T, G.T: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_3$

دوال مباشرة.

ليكن $A \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ عندئذٍ فإن $T(A) \in \text{ob}(\mathcal{A}_2)$
 أي أن $T(A)$ ينتمي إلى منطقتي تطبيق المورفيزمات F, G
 وبالتالي يمكن أخذ صورته وفقاً: $F(T(A)), G(T(A))$
 وهي أسماء للفئة \mathcal{A}_3
 وبما أن Ψ مورفيزم دالٍ فإن:

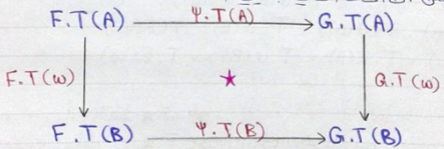
$\Psi(T(A)): F(T(A)) \rightarrow G(T(A))$

وهو مورفيزم للفئة \mathcal{A}_3 ، حسب تعريف $\Psi.T$ يكون له الكل:

$\Psi.T(A): F.T(A) \rightarrow G.T(A)$

ليكن $w: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة \mathcal{A}_1 .

ولنبرهن أن المخطط الآتي تبديلي:



أي نريد برهان أنه :
 $G.T(w) \cdot \Psi.T(A) = \Psi.T(B) \cdot F.T(w)$

طالما أن $w: A \rightarrow B$ مورفيزم للفئة \mathcal{A}_1 فإن المورفيزم
 $T(w): T(A) \rightarrow T(B)$ هو مورفيزم للفئة \mathcal{A}_2 .

ومنه فالمورفيزمان :
 $F(T(w)): F(T(A)) \rightarrow F(T(B))$
 $G(T(w)): G(T(A)) \rightarrow G(T(B))$
 هما مورفيزمان للفئة \mathcal{A}_3 .

لما كان Ψ مورفيزماً دالياً، لدينا $T(w) \in \text{Mor}(\mathcal{A}_2)$ ، فإن المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccc}
 F(T(A)) & \xrightarrow{\Psi(T(A))} & G(T(A)) \\
 \downarrow F(T(w)) & & \downarrow G(T(w)) \\
 F(T(B)) & \xrightarrow{\Psi(T(B))} & G(T(B))
 \end{array}$$

تبدلي، أي:

$$\begin{aligned}
 G(T(w)) \cdot \Psi(T(A)) &= \Psi(T(B)) \cdot F(T(w)) \\
 \Rightarrow G.T(w) \cdot \Psi.T(A) &= \Psi.T(B) \cdot F.T(w)
 \end{aligned}$$

وهذا يبين أن المخطط * تبدلي.

مسبقاً نجد أن $\Psi.T$ مورفيزم دالي.

تعريف:

ليكن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ فئتين ، وليكن $F: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ دالي مباشر .
نقول إن F هو تكافؤ فئات إذا وجد :

- دالي مباشر $G: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1$:
- وإيزومورفيات دالية :

$$\eta: I_{\mathcal{A}_1} \longrightarrow G \cdot F$$

$$\psi: I_{\mathcal{A}_2} \longrightarrow F \cdot G$$

$$F \cdot \eta = \psi \cdot F \quad \text{تفقي}$$

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ فئتين ، وليكن $F: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ دالي مباشر .
إذا كان F تكافؤ فئات ، عندئذ :

1- أيًا كان $A, B \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ فإن التطبيق :

$$F(A, B): \mathcal{A}_1(A, B) \longrightarrow \mathcal{A}_2(F(A), F(B))$$

متباين وغامر .

2- أيًا كان $X \in \text{ob}(\mathcal{A}_2)$ يوجد $Y \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ بحيث :

$$F(Y) \cong X$$

ملحوظة: نعلم أن الدالي المباشر F مؤلف من تطبيق أسماء وتطبيق مورفيزمات .
* إن البند الأول من مبرهنتك يتحدث عن تطبيق المورفيزمات بأنه سيكون متبايناً وغامراً إذا كان F تكافؤ فئات .
واقصفاً رأستك F بدلاً من $F(A, B)$.
* أما البند الثاني فيتحدث عن تطبيق الأسماء ، حيث لأجل كل شيء X من \mathcal{A}_2 سيوجد شيء Y من \mathcal{A}_1 بحيث يتماثل $F(Y)$ مع X (أي يوجد إيزومورفزم بينهما) (يشبه هذا الأمر تعريف الضرب ولكنه مختلف قليلاً)

البرهان: (1) واضح أن $F(A, B)$ تطبيقت.

* إشارات التباين:

ليكن $u, v \in \mathcal{I}_1(A, B)$ بحيث:

$$F(u) = F(v) \quad (F(A, B)(u) = F(A, B)(v))$$

بأن F تكافؤ فإنه يوجد دالي مباشر: $\mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$

وأيضا مورفزمات دالية: $\mathcal{I}_1 \xrightarrow{G \cdot F} G \cdot F$

$\mathcal{I}_2 \xrightarrow{F \cdot G} F \cdot G$

$$F \cdot G = G \cdot F$$

تحقق:

$$G \cdot F : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$$

لدينا:

$$G \cdot F(u) = G \cdot F(v)$$

ومنه يكون:

- بما أن \mathcal{I}_2 مورفزم دالي فإن:

أولاً: من أجل المورفزم $u : A \rightarrow B$ يكون المخطط:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_1(A) = A & \xrightarrow{\mathcal{U}(A)} & G \cdot F(A) \\ \downarrow \mathcal{I}_1(u) = u & & \downarrow G \cdot F(u) \\ \mathcal{I}_1(B) = B & \xrightleftharpoons[\mathcal{U}^{-1}(B)]{\mathcal{U}(B)} & G \cdot F(B) \end{array}$$

تدريج، أي أنه: $G \cdot F(u) \cdot \mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(B) \cdot u$ (*)

ثانياً: لأجل المورفيزم $\alpha: A \rightarrow B$ فإن المخطط:

$$\begin{array}{ccc}
 I_{\mathcal{A}_1}(A) = A & \xrightarrow{\alpha(A)} & G.F(A) \\
 \downarrow I_{\mathcal{A}_1}(\alpha) = \alpha & & \downarrow G.F(\alpha) \\
 I_{\mathcal{A}_2}(B) = B & \xrightleftharpoons[\alpha^{-1}(B)]{\alpha(B)} & G.F(B)
 \end{array}$$

تبدلي ، أي : $G.F(\alpha) \cdot \alpha(A) = \alpha(B) \cdot \alpha$ (**)

- بما أن α إيزومورفيزم دالي فإن $\alpha(A)$ إيزومورفيزم للعنصر α وذلك أيًا كانت $A \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ ومنه فإن $\alpha(B)$ إيزومورفيزم وبالتالي يوجد مورفيزم $\alpha^{-1}(B)$ حيث $\alpha^{-1}(B) \cdot \alpha(B) = I_B$

شرح لماذا $\alpha(A)$, $\alpha(B)$ إيزومورفيزماته ؟

- لكن لنبدأ بالداليان : $F, G: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$

$\alpha: F \rightarrow G$ ولكن الإيزومورفيزم الدالي :

$\psi: G \rightarrow F$ وبالتالي يوجد مورفيزم دالي :

حيث يكون : $\psi \cdot \alpha = I_F$, $\alpha \cdot \psi = I_G$

- ليكن $A \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ عندئذ :

$$\psi \cdot \alpha(A) = I_F(A) \implies \psi(A) \cdot \alpha(A) = I_F(A)$$

$$\alpha \cdot \psi(A) = I_G(A) \implies \alpha(A) \cdot \psi(A) = I_G(A)$$

ومنه فإن $\alpha(A)$ إيزومورفيزم (\mathcal{A}_1)

لنقرن طرفي العلاقتين (*) و (***) من اليسار بـ $\mathcal{L}^{-1}(B)$ فنجد:

$$\mathcal{L}^{-1}(B) \cdot GF(u) \cdot \mathcal{L}(A) = u$$

$$\mathcal{L}^{-1}(B) \cdot GF(v) \cdot \mathcal{L}(A) = v$$

ولكن لدينا $GF(u) = GF(v)$ وبالتالي نجد أن $u = v$ وهو بالتطبيق $F(A, B)$ متباين.

* إثبات العكس:

لأخذ $u: F(A) \rightarrow F(B)$ مورفزم الفئة \mathcal{A}_2 :

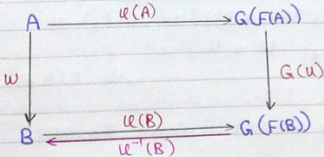
من مستقر F

عندئذٍ $G(u): G(F(A)) \rightarrow G(F(B))$ مورفزم للفئة \mathcal{A}_1 .

لنشكل المورفزم $w = \mathcal{L}^{-1}(B) \cdot G(u) \cdot \mathcal{L}(A)$:

مورفزمات للفئة \mathcal{A}_1

كما هو موضح في المخطط:



ف نجد أن $w: A \rightarrow B$ مورفزم للفئة \mathcal{A}_1 (من المثلثة)

ولنثبت أن $F(w) = u$:

$u: F(A) \rightarrow F(B)$: بما أن Ψ مورفزم دالي فإن لأجل المورفزم Ψ فإن المخطط التالي:

$$\begin{array}{ccc}
 I_{F(A)}(F(A)) = F(A) & \xrightarrow{\Psi(F(A))} & F.G(F(A)) \\
 \downarrow I_{F(A)}(u) = u & & \downarrow F.G(u) \\
 I_{F(B)}(F(B)) = F(B) & \xrightarrow{\Psi(F(B))} & F.G(F(B))
 \end{array}$$

$\Psi(F(B)) \cdot u = F.G(u) \cdot \Psi(F(A))$ تبدلي أي:

$(\Psi \cdot F)(B) \cdot u = F.G(u) \cdot (\Psi \cdot F)(A)$

$F.u(B) \cdot u = F.G(u) \cdot F.u(A) \dots \square$

* $F(u) = F(u^{-1}(B) \cdot G(u) \cdot u(A))$
 $= F(u^{-1}(B)) \cdot F(G(u)) \cdot F(u(A))$
 $= F(u^{-1}(B)) \cdot F.G(u) \cdot F.u(A)$
 $= F(u^{-1}(B)) \cdot F.u(B) \cdot u$ من \square
 $= F(u^{-1}(B)) \cdot F(u(B)) \cdot u$
 $= F(u^{-1}(B) \cdot u(B)) \cdot u = F(I_B) \cdot u$
 $= I_{F(B)} \cdot u = u$

وفيه $F(A, B)$ عامر

$G(X) \in \text{ob}(\mathcal{A}_1)$ عندئذ $X \in \text{ob}(\mathcal{A}_2)$ ليكن $Y = G(X)$ لنفخ

$X \cong F.G(X)$: بما أن Ψ مورفزم دالي (تآلف) فإن:

$F(Y) = F(G(X)) = F.G(X) \cong X$ وبالتالي:

وهو المطلوب