نمذجة رياضية

المحاضرة السابعة عشرة

٣/٥/٢٠١٥

النموذج الساكن مع عجز ولمادة واحدة:

يستخدم هذا النموذج لتخزين بعض المواد القابلة للعطب أو الفساد، مثل: الاسمنت، الحليب .....

ويحدث العجز في المخزون عندما يكون حجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية أقل من حجم الطلب على المادة المخزونة خلال تلك الدورة.

لذلك لمعالجة هذه الحالة نضيف فرضية جديدة إلى الفرضيات الأساسية:

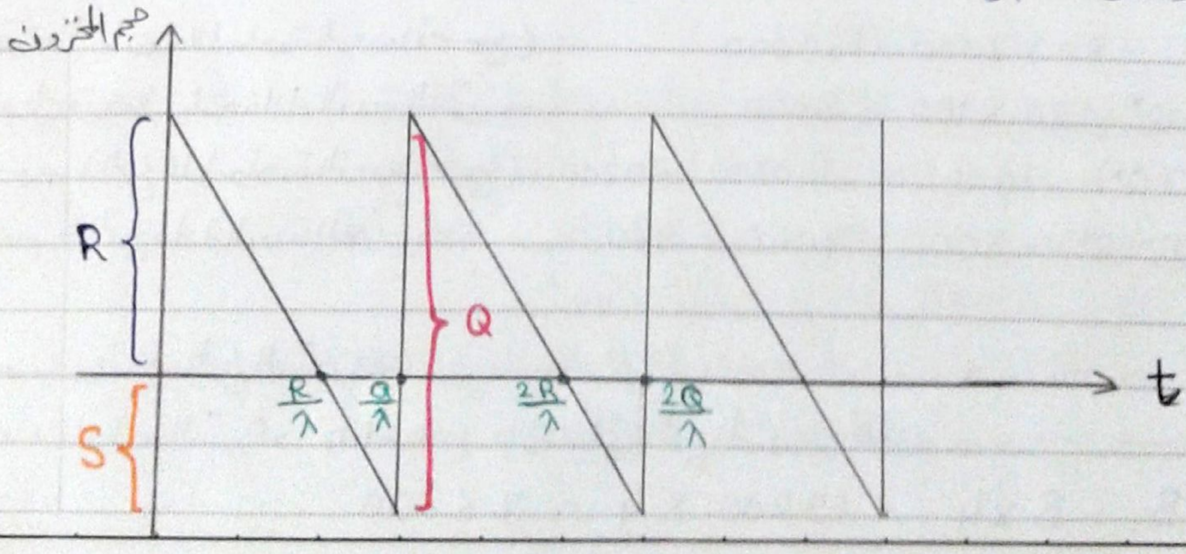
(إن مقدار العجز المسموح به في كل دورة تخزينية يساوي مقداراً ثابتاً S ، وإن تكلفة العجز هي p لكل واحدة من الطلب غير المحقق خلال واحدة الزمن وهي تشمل غرامات التأخير وفقدان ثقة الزبائن وغير ذلك)

نرمز لحجم المخزون المتوفر في بداية الدورة التخزينية بالرمز R

ونرمز لحجم الطلبية التي ترد إلى المستودع في بداية كل دورة بالرمز Q

حيث أن $R < Q$

ومقدار العجز خلال كل دورة هو: $S = Q - R$



/ /

- نفرض أن λ تمثل معدل الطلب على المادة في واحدة الزمن
إن حجم المخزون المتوفر r مرتبط بالزمن، حيث: $r = R - \lambda t$
وإن مدة نفاذ المخزون تساوي $\frac{R}{\lambda}$.
وإن مدة الدورة التخزينية هي $\frac{Q}{\lambda}$ وهي أكبر من $\frac{R}{\lambda}$.
لذلك نجزئ المجال $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ إلى مجالين:

$$[0, \frac{R}{\lambda}] ,]\frac{R}{\lambda} , \frac{Q}{\lambda}]$$

حيث أن المجال الأول موافق للفترة الأولى وهي تكون بدون عجز
أما المجال الثاني فهو موافق للفترة الثانية وهي مع عجز.

- إن حساب التكاليف على الفترة $[0, \frac{R}{\lambda}]$ يتم كما في النموذج السابق.
ومن أجل تحديد التكاليف على كامل الفترة $[0, \frac{Q}{\lambda}]$ نضيف تكلفة جديدة C_4
تعبّر عن تكلفة العجز في الدورة التخزينية الواحدة.
عندئذٍ يصبح لدينا: $TC(Q,R) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

حيث: $C_1 = k \quad , \quad C_2 = CQ$

$$C_3 = \int_0^{\frac{R}{\lambda}} h(R - \lambda t)\,dt = \frac{hR^2}{2\lambda}$$

$$C_4 = -\int_{\frac{R}{\lambda}}^{\frac{Q}{\lambda}} p(R - \lambda t)\,dt = \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

وبالتالي تصبح مجمل التكاليف:

$$TC(Q,R) = k + CQ + \frac{hR^2}{2\lambda} + \frac{P(Q-R)^2}{2\lambda}$$

وللحصول على إجمالي التكاليف في واحدة الزمن:

$$C(Q,R) = \frac{TC(Q,R)}{\frac{Q}{\lambda}} = \frac{\lambda k}{Q} + \lambda C + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{P(Q-R)^2}{2Q}$$

- ومنه فالنموذج الرياضي: أوجد القيمة الأصغرية للتابع :

$$C(Q,R) = \frac{\lambda k}{Q} + \lambda C + \frac{hR^2}{2Q} + \frac{p(Q-R)^2}{2Q}$$

ضمن الشروط: $Q \geq R$

$Q \geq 0 \quad , \quad R \geq 0$

- إن هذا النموذج هو نموذج لا خطي بمتحولين Q , R
من أجل إيجاد القيم الأمثلية Q^*, R^* نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية بالنسبة لكل من Q , R ونعدمها، فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين بحلها نحصل على قيم تصغرى للتابع $C(Q,R)$.

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial Q} = \frac{1}{Q^2}\left[-\lambda k - \frac{hR^2}{2} + p(Q-R)Q - \frac{1}{2}p(Q-R)^2\right] = 0$$

$$\frac{\partial C(Q,R)}{\partial R} = \frac{hR}{Q} - \frac{P(Q-R)}{Q} = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$Q^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{P+h}{P}\right)}$$

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{P}{P+h}\right)}$$

ونجد أن Q^*, R^* مرتبطتان بالعلاقة:

$$Q^* = \frac{P+h}{P} R^*$$

بما أن $h > 0$ فإن $\frac{P+h}{P} > 1$ وبالتالي $Q^* > R^*$

أي أن حل المعادلتين يحافظان على الشرط الأساسي $Q > R$.

/ /

ولكي نتأكد من كون القيمة الموافقة هي قيمة عظمى أو صغرى نقوم بإيجاد مصفوفة هيسيان ثم نحدد نوع هذه المصفوفة:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 C}{\partial Q^2} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial Q \partial R} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 C}{\partial R \partial Q} & \dfrac{\partial^2 C}{\partial R^2} \end{bmatrix}$$

بعد حساب هذه المشتقات وتعويض قيم إحداثيات النقطة (Q^*, R^*) نجد أن المحددات الصغرى الأساسية لهذه المصفوفة غير سالبة، أي أن النقطة (Q^*, R^*) تقابل نهاية صغرى للتابع $C(Q, R)$.

وبعد الحصول على R^* , Q^* يمكننا حساب قيمة تابع إجمالي التكاليف خلال واحدة الزمن والذي يبلغ أصغر قيمة له عند هاتين القيمتين من العلاقة:

$$C(Q^*, R^*) = \frac{\lambda k}{Q^*} + \lambda C + \frac{h R^{*2}}{2Q^*} + \frac{P(Q^* - R^*)^2}{2Q^*}$$

أما قيمة تابع إجمالي التكاليف خلال الدورة التخزينية التي مدتها $T^* = \dfrac{Q^*}{\lambda}$ فيساوي:

$$TC(Q^*, R^*) = C(Q^*, R^*) \cdot \frac{Q^*}{\lambda}$$

نص السؤال الامتحاني:

من نماذج المخزون النموذج السكوني (بدون عجز، أو مع عجز) ولمادة واحدة.

المطلوب: 1) اكتب الفرضيات الأساسية لهذا النموذج.

2) إذا كان السؤال عن النموذج بدون عجز:

عين حجم الطلبية المثالية بحيث تكون تكلفة التخزين أقل ما يمكن

أما إذا كان السؤال عن النموذج مع عجز:

عين الحجم المثالي للمخزون في بداية الدورة التخزينية والحجم المثالي للطلبية بحيث تكون تكلفة التخزين أصغر ما يمكن.

/ /

مسألة: (لم تحلها الدكتورة)

تقوم أحد المستودعات بتخزين وبيع مادة الإسمنت ، فإذا علمت أن معدل الطلب الشهري عليه يبلغ 90 طن ، وأن المدة اللازمة لاستلام الطلبية بعد تقديم طلب عليها تساوي 2 أيام .

وأن تكلفة إعداد الطلبية الواحدة تساوي 200 ل.س

وأن سعر شراء الطن من الإسمنت واصلاً يساوي 5000 ل.س

وأن تكلفة تخزين الطن الواحد خلال واحدة الزمن تساوي 10 ل.س

وأن تكلفة العجز عن كل طن خلال واحدة الزمن تساوي 50 ل.س .

وإذا علمت أن نظام المستودع يسمح بوقوع عجز محدود ، فالمطلوب :

1) حساب الحجم المثالي للطلبية الأدنى R^* وللطلبية الدورية Q^*

2) احسب كمية العجز المسموح بها .

3) حساب المؤشرات المختلفة للعمل في هذا المستودع .

علماً أن سعر مبيع الطن الواحد من الاسمنت هو 5500 ل.س

الحل: سوف نعتبر أن واحدة الزمن هي اليوم .

المعطيات : معدل الطلب الشهري هو 90 طن ، وبالتالي فإن معدل الطلب خلال واحدة الزمن (في اليوم) هو : $\lambda = \frac{90}{30} = 3$ طن

مدة استلام الطلبية : $d = 2$ أيام .

أما التكاليف :

$k = 200 \quad , \quad c = 5000 \quad , \quad h = 10 \quad , \quad p = 50$

1) $$R^* = \sqrt{\left(\frac{2\lambda k}{h}\right)\left(\frac{p}{p+h}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 \times 3 \times 200}{10}\right)\left(\frac{50}{50+10}\right)}$$

$$R^* = \sqrt{120 \times \frac{50}{60}} = \sqrt{100} = 10$$

$$Q^* = \frac{p+h}{h} R^* = \frac{50+10}{50} \times 10 = \frac{60}{5} = 12$$

Scanned by CamScanner

/ /

2) كمية العجز المسموح بها : $S = Q^* - R^* = 12 - 10 = 2$

3) المؤشرات :

* مدة الدورة التخزينية بالأيام : $T^* = \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{12}{3} = 4$

* عدد الطلبيات اللازمة في اليوم : $n^* = \frac{\lambda}{Q^*} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

* كمية إعادة الطلب : $Q_1 = d\lambda = 2 \times 3 = 6$

* إجمالي تراكم المخزون في المستودع خلال الدورة التخزينية :

$$y^* = \frac{R^{*2}}{2\lambda} = \frac{10 \times 10}{2 \times 3} = 16.66$$

* متوسط حجم المخزون في المستودع خلال يوم ، في الفترة $[0, T^*]$:

$$\bar{y} = \frac{R^*}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

* أصغر تكلفة تخزين خلال واحدة الزمن :

$$C(Q^*, R^*) = \frac{\lambda k}{Q^*} + \lambda C + \frac{h R^{*2}}{2Q^*} + \frac{P(Q^* - R^*)^2}{2Q^*}$$

$$= \frac{3 \times 200}{12} + 3 \times 5000 + \frac{10 \times 100}{2 \times 12} + \frac{50 \times 2^2}{2 \times 12}$$

$$= 50 + 15000 + \frac{125}{3} + \frac{25}{3}$$

$$= 15050 + \frac{150}{3} = 15050 + 50 = 15100$$

* إجمالي تكلفة التخزين خلال مدة الدورة التخزينية :

$$TC(Q^*, R^*) = C(Q^*, R^*) \times T^* = 15100 \times 4 = 60400$$

* قيمة المبيعات في اليوم: $V = 5500 \times \lambda = 5500 \times 3 = 16500$

حيث 5500 هو سعر الطن الواحد من الإسمنت حسب نص المسألة

* إجمالي قيمة المبيعات خلال الدورة التخزينية:

$W = 5500 \times Q^* = 5500 \times 12 = 66000$

* متوسط الربح خلال وحدة الزمن (خلال اليوم):

$B = V - C(Q^*, R^*) = 16500 - 15100 = 1400$

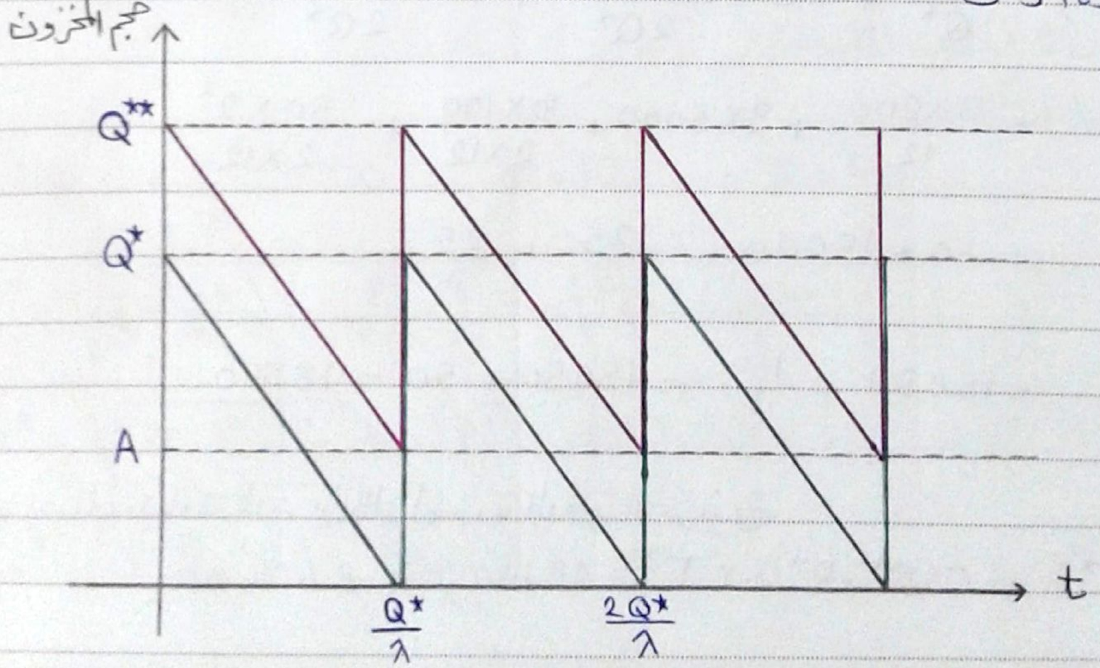
* متوسط الربح خلال الدورة التخزينية:

$B' = W - TC(Q^*, R^*) = 66000 - 60400 = 5600$

النموذج السكوني مع الاحتياطي ولمادة واحدة:

يستخدم هذا النموذج لتخزين المواد التي تشترط وجود احتياطي أمان لحالات الطوارئ والإسعاف كالأدوية والأغذية والوقود ...

تختلف معالجة هذا النموذج عن النموذج السابق (مع عجز) باستبدال العجز باحتياطي، وبوضع فرضية بديلة جديدة، وهي أن مقدار احتياطي الأمان في كل دورة تخزين، وعلى مدار الزمن يجب أن يساوي مقداراً ثابتاً A وإن تكلفة تخزين ذلك الاحتياطي تبلغ h عن كل وحدة منه خلال وحدة الزمن.



Subject: .... / /

نلاحظ أن تكلفة تخزين ذلك الاحتياطي خلال واحدة الزمن هي hA

ويكون إجمالي تكلفة تخزين ذلك الاحتياطي خلال الدورة التخزينية هو :

$$C_4 = h.A.T \quad ; \quad T = \frac{Q}{\lambda}$$

ومنه فإن التكلفة الإجمالية تعطى :

$$TC(Q) = k + CQ + \frac{hQ^2}{2\lambda} + h.A.T$$

أما التكلفة الكلية خلال واحدة الزمن فتعطى :

$$C(Q) = \frac{TC(Q)}{\frac{Q}{\lambda}} = \frac{\lambda k}{Q} + \lambda C + \frac{hQ}{2} + h.A$$

ويكون عندئذٍ الحجم المثالي للطلبية هو :

$$Q^{**} = Q^{*} + A = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} + A$$

نهاية المحاضرة السابعة عشرة