المحاضرة العاشرة

٧/٤/ ٢٠١٥ ق

عزوم العينة ودوالها

1 العينة العشوائية لمتغير عشوائي X من الحجم n :

هي مجموعة المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ و المستقلة والتي لها جميعاً توزيع X.

2 الإحصاءات : هي كل دالة في عينة عشوائية ولا تتعلق بوسطاء مجهولة.

3 متوسط العينة $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

4 تباين العينة

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$$

توزيع كاي مربع وتوزيع ستيودنت : وهما توزيعان هامان مستخدمان على نطاق واسع في الإحصاء التطبيقي وسنبدأ بتعريف دالة غاما ذات العلاقة بهما

تعريف دالة غاما : وهي دالة معطاة بالعلاقة

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} \, dx$$

نتيجة $\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$

الإثبات :

((نستخدم التكامل بالتجزئة))

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} \, dx$$

$$u = x^{a-1} \Rightarrow du = (a-1)\,x^{a-2}\,dx \,,\; dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Gamma(a) = \left[-x^{a-1} \cdot e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (a-1) \int_0^{+\infty} x^{a-2} \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\Gamma(a) = [0 - 0] + (a-1) \int_0^{+\infty} x^{(a-1)-1} \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\Rightarrow \Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$$

خواص دالة غاما

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $\Gamma(n+1) = n!$ ومنه $\Gamma(1) = 0! = 1$
- أي $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

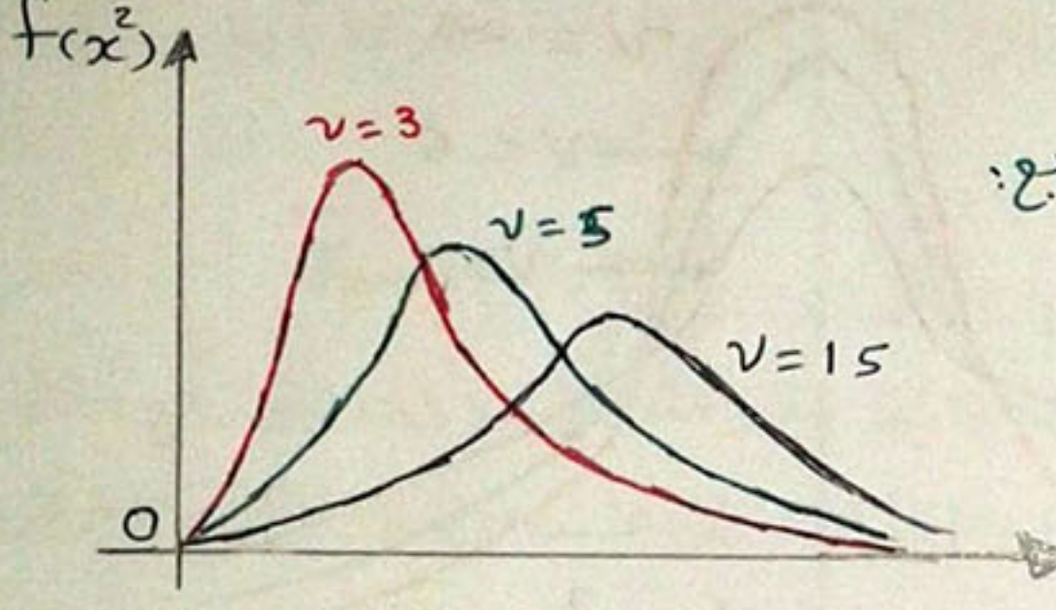
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} \, dx = \sqrt{\pi}$$

1 توزيع كاي مربع :

• تعريف نقول إنّ للمتغير العشوائي X التوزيع χ^2 (كاي مربع) بدرجة من الحرية ν (نيو) إذا كانت له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} \quad ; x > 0$$

ودرجة الحرية ν تعبير خاص يدل على الوسيط (ν) في هذا التوزيع :



خواص توزيع χ^2 كاي مربع:

1 إذا كان Z متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً $Z \sim N(0,1)$ فإنّ Z^2 له توزيع كاي مربع بدرجة حرية $\nu = 1$.

2 إذا كانت المتغيرات العشوائية $X_1, \ldots, X_n$ مستقلة ولكل منها التوزيع الطبيعي المعياري فإنّ المتغير العشوائي $K^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ له توزيع كاي مربع بدرجة حرية $\nu = n$.

3 إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ولكل منهما توزيع كاي مربع بدرجات حرية ν_1, ν_2 على الترتيب فيكون للمتغير العشوائي $X = X_1 + X_2$ توزيع كاي مربع بدرجة حرية $\nu = \nu_1 + \nu_2$

4 إذا كان X_1, X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين وكان $X_1 \sim \chi^2(\nu_1)$ وكان $X_1 + X_2 \sim \chi^2(\nu)$ حيث $\nu > \nu_1$ فإنه يكون للمتغير العشوائي X_2 توزيع كاي مربع بدرجة حرية $\nu_2 = \nu - \nu_1$ أي $X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$

5 إذا كان $X \sim \chi^2(\nu)$ فإنّ: $\mu = E(X) = \nu$ ، $\sigma^2 = Var(X) = 2\nu$

جدول توزيع كاي مربع

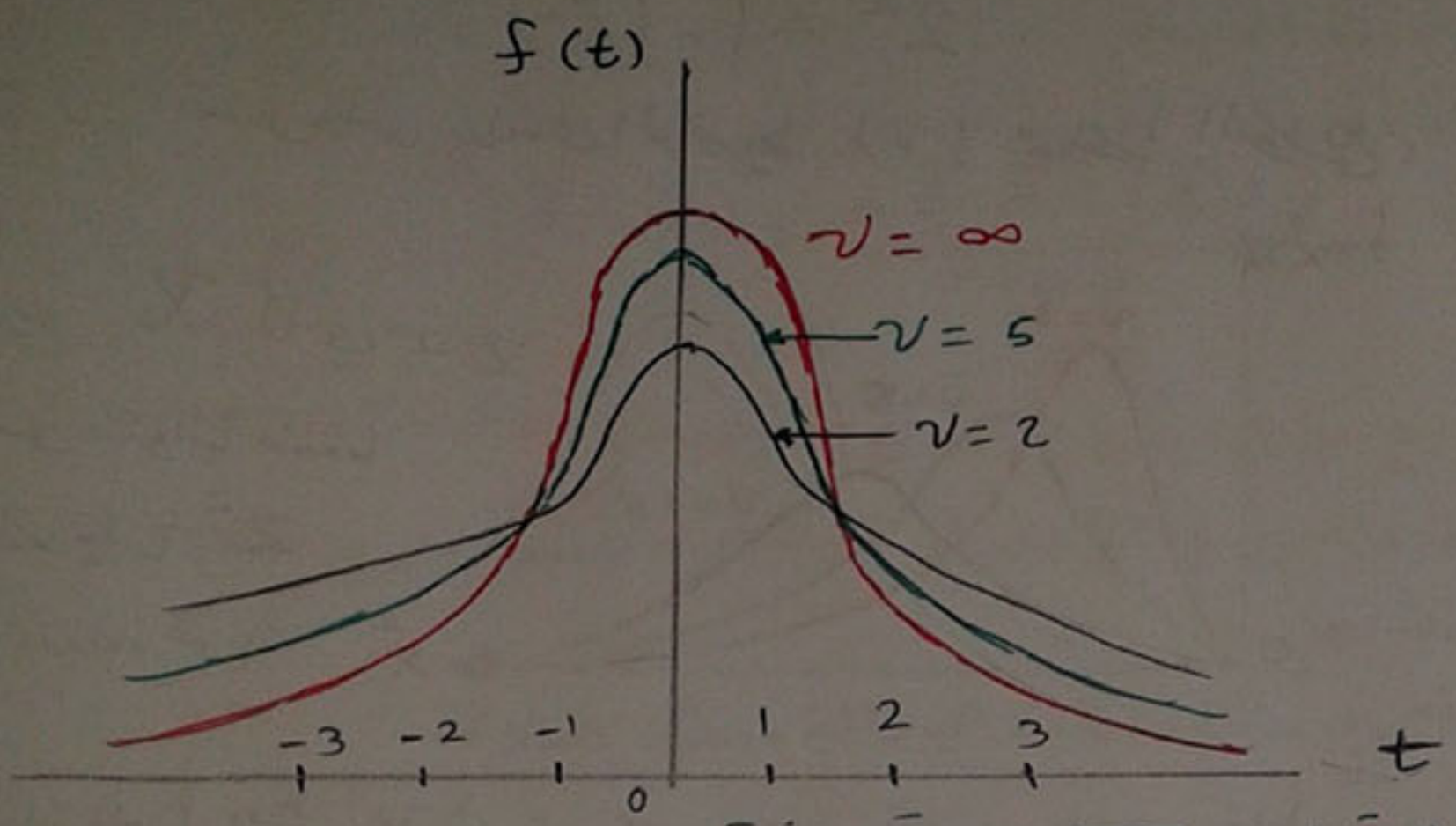
كما في جدول التوزيع الطبيعي الجدول غير مطلوب ولكنه طريقة لإيجاد القيمة المقابلة في الجدول ، و لنتأمل الجدول

جدول توزيع كاي مربع χ^2

2 توزيع T ستيودنت :

• تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي المستمر X التوزيع T ستيودنت بدرجة حرية (ν) ويكون له دالة الكثافة

$$f_x(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{2\pi}}$$



جدول توزيع T ستيودنت

كما في الجدول السابق المطلوب هو معرفة كيفية إخراج القيمة المقابلة من الجدول:

توضيح جدول توزيع χ^2 كاي مربع

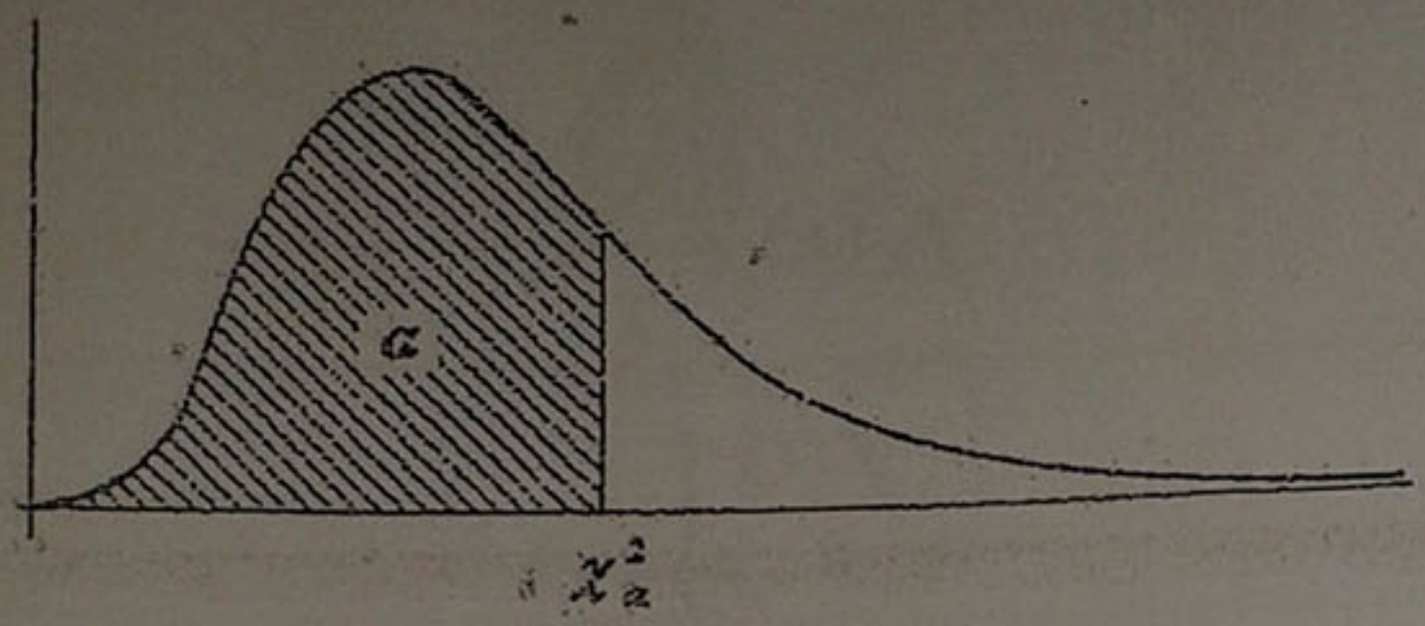
درجة الحرية ν \ χ^2_a	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	...	$\chi^2_{0.995}$
1	$\chi^2_{0.005}(1)=\infty$	0	...	$\chi^2_{0.995}(1)=7.88$
2	$\chi^2_{0.005}(2)$	. .	--	$\chi^2_{0.995}(2)=10.6$
:	:	:	:	:
10	$\chi^2_{0.005}(10)$	:	:	:
:	:	:	:	:
60				

توضيح جدول توزيع T ستيودنت

درجة الحرية ν \ T_a	$t_{0.55}$	--- $t_{0.9995}$
1	$t_{0.55}(1)=0.158$	$-t_{0.9995}(1)=63.7$
2	:	.
:	:	:
10	$t_{0.55}(10)=0.127$	$-t_{0.9995}(10)=4.59$
:	:	:
30		

جـ - الجدول (3)

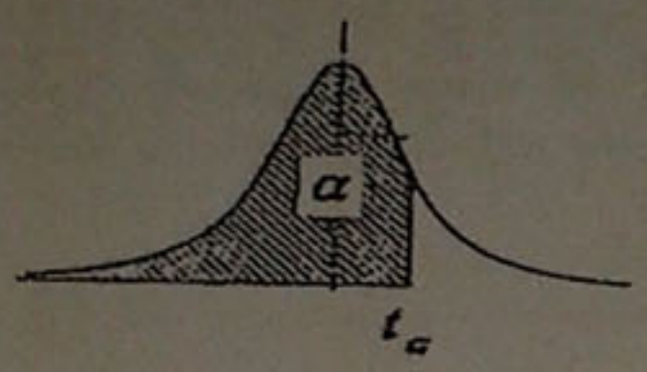
جدول توزيع كاي - مربع



Degrees of freedom	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.20}$	$\chi^2_{.30}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.70}$	$\chi^2_{.80}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
1	.000	.000	.001	.004	.016	.064	.148	.455	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.010	.020	.051	.103	.211	.446	.713	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.00	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	10.3	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	11.3	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	12.3	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	13.3	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	14.3	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	15.3	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	16.3	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	17.3	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.83	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	18.3	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	19.3	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	23.3	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.1	24.4	26.5	29.0	32.3	34.9	39.3	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.3	34.8	37.7	41.3	44.3	49.3	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	50.6	53.8	59.3	65.2	69.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0

ب - الجدول (2)

جدول توزيع t - ستودنت



Degrees of Freedom	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.65}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.9995}$
1	.158	.325	.510	.727	1.00	1.38	1.96	3.08	6.31	12.7	31.8	63.7	63.7
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.06	1.39	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.25	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	12.9
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.19	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.16	1.48	2.01	2.57	3.36	4.03	6.86
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.13	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.12	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50	5.40
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.11	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.10	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.09	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.09	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.08	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06	4.32
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.08	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.08	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	4.14
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.07	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.07	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	4.02
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.07	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.07	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.07	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88
20	.127	.257	.391	.533	.687	.860	1.06	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84	3.85
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.06	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.82
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.06	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.79
23	.127	.256	.390	.532	.685	.858	1.06	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.77
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.06	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.74
25	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.06	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79	3.72
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.06	1.32	1.70	2.06	2.48	2.78	3.71
27	.127	.256	.389	.531	.684	.855	1.06	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.69
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.06	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.67
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.05	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76	3.66
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.05	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.65
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.04	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.29

مبرهنة خاصة مهمة لتوزيع T ستيودنت:

إذا كان Z متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً $Z \sim N(0,1)$ وكان X متغيراً عشوائياً له توزيع كاي مربع أي $X \sim \chi^2(\nu)$ وكان X, Z مستقلين فإنه يكون للمتغير العشوائي $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{\nu}}}$ توزيع T ستيودنت درجة حريته ν.

توزيعات بعض الإحصاءات:

1) توزيع متوسط العينة $\overline{X}$: إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X له التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 أي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

فحسب المبرهنة السابقة يكون

$$\overline{X} \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \; ; \; \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

أما إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X له التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 أي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فحسب مبرهنة النهاية المركزية فإن التوزيع الاحتمالي لمتوسط العينة

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

يسعى إلى التوزيع الطبيعي $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

مثال:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_9$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X له التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 3$ وتباين $\sigma^2 = 16$ أوجد $P(0.5 < \overline{X} < 6)$

الحل: بما أن العينة لمتغير عشوائي طبيعي فإن توزيع المتوسط $\overline{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(3, \frac{16}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_{\overline{X}} = 3 \; , \; \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P(0.5 < \overline{X} < 6) = P\left(\frac{0.5 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{6 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{0.5 - 3}{\frac{4}{3}} < \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{6 - 3}{\frac{4}{3}}\right)$$

للمعايرة نضع $Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$ فيكون $Z \sim N(0,1)$ ومنه

$$P(0.5 < \overline{X} < 6) = P(-1.875 < Z < 2.25) = P(Z \leq 2.25) - P(Z \leq -1.875)$$

$$\Rightarrow \quad p(0.5<\overline{X}<6)=\phi(2.25)-\phi(-1.875)$$

$$=\phi(2.25)-[1-\phi(1.875)]$$

$$p(0.5<\overline{X}<6) \quad =0.9878-(1-0.9696)=0.9574$$

ملاحظة: إنّ $\phi(1.875)$ غير موجودة في جدول التوزيع الطبيعي لذلك نأخذ متوسط القيمتين اللتين تحصرانه أي

$$\phi(1.875)=\frac{\phi(1.88)+\phi(1.87)}{2}$$

تمرين: إذا كان متوسط الدخل الأسبوعي لمجموعة كبيرة من المهرة 1200 ل.س بانحراف معياري قدره 100 ل.س فما هو احتمال أن يكون متوسط الدخل لعينة حجمها $n=64$ أكبر من 1180 ل.س في الأسبوع.

الحل بما أنّ $n=64$ و $\mu=1200$ ، $\sigma=100$ ، $\sigma^2=10000$

حسب مبرهنة النهاية المركزية

$$\overline{X}\sim N\left(1200,\frac{10000}{64}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_{\overline{X}}=1200 \;,\; \sigma^2_{\overline{X}}=\frac{10000}{64} \Rightarrow \sigma_{\overline{X}}=\frac{100}{8}=\frac{50}{4}$$

ومنه:

$$p(\overline{X}>1180)=1-p(\overline{X}\leq 1180)=1-P\left(\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\leq\frac{1180-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$

للمعايرة نضع $Z=\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$ فيكون $Z\sim N(0,1)$ ومنه

$$p(\overline{X}>1180)=1-p(Z\leq -1.6)=1-\phi(-1,6)$$

$$p(\overline{X}>1180) \;=\phi(1.6)=0.9452$$

انتهت المحاضرة العاشرة