المحاضرة السابعة عشرة

مجال الثقة للفرق بين متوسطي متغيرين عشوائيين طبيعيين تباينهما معلوم:

إذا كان $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وليكن $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ متوسطي عينتين مستقلتين حجمهما n_1, n_2 للمتغيرين X_1, X_2 على الترتيب وبالتالي نجد حسب مبرهنة سابقة

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) , \quad \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وحسب مبرهنة:

$$a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2, a\frac{\sigma_1^2}{n_1} + b\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه من أجل $a = 1$ & $b = -1$ يكون

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبالتالي نجد أن مجال الثقة $100(1-\alpha)\%$ للفرق بين المتوسطين هو المجال

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \; ; \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

ملاحظات: 1- عندما يكون للمتغيرين X_1, X_2 التوزيع الطبيعي وعندما يكون $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$ وبفضل مبرهنة النهاية المركزية فإن مجال الثقة السابق يبقى مجال ثقة تقريبي للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ ويعطى الخطأ المطلق الأعظمي المرتكب عند مستوى الثقة $100(1-\alpha)\%$ بالعلاقة

$$e = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right|$$

2- إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وعندما $(n_1, n_2 \geq 30)$ يمكن استبدال σ_1 بـ S_1 و σ_2 بـ S_2 (حيث S_1 و S_2 الانحرافان المعياريان للعينتين X_1 و X_2 على الترتيب) ويصبح مجال الثقة بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \; ; \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

تمرين: لمقارنة نوعين من المصابيح A و B أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 150$ مصباحاً من النوع A فكان متوسطها $\bar{X}_1 = 1400$ ساعة بانحراف معياري $S_1 = 120$ ساعة، كما أخذت عينة حجمها $n_2 = 200$ مصباح من النوع B فكان متوسطها $\bar{X}_2 = 1200$ ساعة بانحراف معياري $S_2 = 80$ ساعة. أوجد 97% مجال ثقة للفرق بين متوسطي أعمار مجموعتي المصابيح ~~[illegible]~~ A, B

الحل: بما أن $n_1 = 150 \geq 30$ و $n_2 = 200 \geq 30$ فيمكن اعتبار

$$\sigma_1 = S_1 = 120 \quad , \quad \sigma_2 = S_2 = 80$$

ولدينا: $1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$

ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد أن $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.985} = 2.17$

ويكون مجال الثقة 97% للفرق $\mu_1 - \mu_2$ هو

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \; ; \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

$$= \left[(1400-1200) - 2.17 \sqrt{\frac{14400}{150} + \frac{6400}{200}} \; ; \; (1400-1200) + 2.071 \sqrt{\frac{14400}{150} + \frac{6400}{200}} \right]$$

$$= [175.45 \; ; \; 224.55]$$

وبما أن طرفي المجال موجبان نستنتج أن المصابيح من النوع A هي الأفضل لأن متوسط أعمارها هو الأكبر.

تمرين: في اختبار تجريبي في مقرر الإحصاء تقدم 75 طالباً و 50 طالبة فكان متوسط درجات الطلاب (82) درجة بانحراف معياري قدره (8) درجات، بينما كان متوسط درجات الطالبات (78) درجة بانحراف معياري قدره (6) درجات والمطلوب:

أوجد مجال ثقة 96% للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ حيث μ_1 متوسط درجات مجتمع الطلاب و μ_2 متوسط مجتمع الطالبات، وهل تقدم هذه النتائج دلالة كافية على وجود فرق يذكر بين مستوى الطالبات ومستوى الطلاب.

الحل بما أن $n_1 = 75 \geq 30$ & $n_2 = 50 \geq 30$ فيمكن اعتبار

$\sigma_1 = S_1 = 8$ و $\sigma_2 = S_2 = 6$ ولدينا:

$$1-\alpha = 0.96 \Rightarrow \alpha = 0.04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.98$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد أن $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.98} = 2.05$

فيكون مجال الثقة 97% للفرق $(\mu_1 - \mu_2)$ هو

$$\left[(\bar{X}_1 - X_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \; ; \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2}{n_2}} \right]$$

$$= \left[(82-76) - 2.05 \sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}} \; ; \; (82-76) + 2.05 \sqrt{\frac{64}{75} + \frac{36}{50}} \right]$$

$$= [3.43 \; ; \; 8.57]$$

نلاحظ أن طرفي المجال موجبان وهذا يدل على أن مستوى الطلاب أفضل بثقة 96%

مجال الثقة لنسبة في المجتمع: من المسائل المهمة تقدير نسبة العناصر من المجتمع المحققة لصفة معينة مثل نسبة المدخنين من بين طلاب جامعة دمشق ...

فإذا كانت نسبة العناصر المحققة لصفة A هي p فإن احتمال أن نختار عنصر يحقق هذه الصفة يساوي p وبالتالي يمكن أن نمثل المجتمع بمتغير عشوائي X له التوزيع البرنولي بالوسيط (p) [والتي هي نسبة العناصر المطلوبة من المجتمع) وقد وجدنا سابقاً

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{Y}{n}$$

حيث Y يدل على عدد العناصر التي تحقق الصفة A و $\bar{X}$ متوسط عينة حجمها n لمتغير برنولي وسيطه p.

إن مقدر p هو مقدر منصف لأن:

$$E(\hat{p}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{1}{n}\cdot n p = p$$

وعندما يكون حجم العينة $n \geq 30$ حسب مبرهنة النهاية المركزية يكون:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}} \sim N(0,1)$$

وبالتالي نجد أن مجال الثقة للوسيط p بمستوى $100(1-\alpha)\%$ هو:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \,;\, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = \left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \,;\, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right]$$

ويمكن استبدال p, q بمقدراتها $\hat{p}$ ، $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ ، ويصبح مجال الثقة

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \,;\, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

ويُعطى الخطأ المطلق الأعظمي في تقدير p بالعلاقة

$$e = \left| \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right|$$

وحجم العينة الواجب أخذها كي لا يتجاوز مقدار الخطأ المقدار (ε) وبمستوى ثقة $100(1-\alpha)\%$ هو

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\varepsilon}\right)^2$$

تمرين: لدى تخدير 100 شخص من المرضى الكبار في السن تبين أن (36) منهم حصلت لهم مضاعفات جراء تخديرهم والمطلوب

1. أوجد 95% مجال ثقة لنسبة الذين يعانون من مضاعفات جراء تخديرهم.
2. عيّن الخطأ الأعظمي المطلق المرتكب عندما نفترض أن $p = \hat{p}$ وبثقة 98%.

3- ما هو حجم العينة لكي لا يتجاوز الخطأ في تقدير P المقدار 0.04 وبثقة 99%.

الحل: لدينا $n=100$ ، $Y=36$

$\boxed{1}$ $$\hat{P}=\bar{X}=\frac{Y}{n}=\frac{36}{100}=0.36$$

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.975$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.975}=1.96$$

فيكون مجال الثقة لـ P بمستوى ثقة 95% هو

$$\left[\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]=\left[0.36-1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}}\ ;0.36+1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}}\right]$$

$$=[0.266\ ;\ 0.454]$$

$\boxed{2}$ $$1-\alpha=0.98 \Rightarrow \alpha=0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.01 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.99$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.99}=2.33$$

ومنه الخطأ المطلق المرتكب الأعظمي هو

$$e=\left|\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right|=\left|\pm 2.33\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{100}}\right|=|\pm 0.112|=0.112$$

$\boxed{3}$ $$1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.005 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.995$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.995}=2.575$$

ومنه حجم العينة التي ينبغي دراستها هي

$$n\geq\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\varepsilon}\right)^2=\left(\frac{2.575}{2(0.04)}\right)^2=1036.035$$

أي أنه يجب يكون حجم العينة

$$n\geq 1037$$

انتهت المحاضرة السابعة عشرة