.. الأخيرة ..   18/ 5/2015

المحاضرة السابعة عشرة

* التشاكل الزمري بين $SU(2)$ و $O(3)$:

توصيف الزمرة $SU(2)$: إذا كان $g \in SU(2)$ فإن :

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad ; \quad \det g = 1 \text{ and } g^* = g^{-1}$$

حيث $g^* = (\bar{g})^t$

أي :

$$(\bar{g})^t = g^{-1} \iff \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد : $\delta = \bar{\alpha}$ and $\gamma = -\bar{\beta}$

وبالتالي كل عنصر من الزمرة $SU(2)$ له الشكل :

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad ; \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- تكمن فكرة إيجاد $T_g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ من أجل كل عنصر $g \in SU(2)$ بحيث $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثر واحدي ربط العنصر g بالمؤثر الواحدي f .

إذا كان $x \in \mathbb{R}^3$ فإن : $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

حيث $(e_i)_{i=1,2,3}$ القاعدة القانونية لـ $\mathbb{R}^3$ و $x = (x_1, x_2, x_3)$

وبالتالي العنصر x يعرف المصفوفة التالية :

$$H_x = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + i x_2 \\ x_1 - i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

حيث هذه المصفوفة تحقق :

- $\det H_x = -x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)$

$= -\|x\|^2$ ((حيث نظيم شعاع هو $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$)) .

- وتحقق شرط الهرميتية : $H_x^{-1} = H_x^*$

* لنأخذ المجموعة :

[illegible] تفاضلية

$$M_2^+ = \{ H_x \; ; \; x \in \mathbb{R}^3 \}$$

فنجد أن M_2^+ هو فضاء شعاعي جزئي من $M_2(\mathbb{C})$ ((تأكد من ذلك))

حيث إذا كان $g \in SU(2)$ فإن $g H_x g^{-1} \in M_2^+$ ((تحقق من ذلك)) .

* ولنأخذ العلاقة :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2^+$$
$$x \longmapsto H_x$$

نثبت أن f تقابل لأن: (مؤثر خطي):

- f تطبيق لأنه إذا كان $x, x' \in \mathbb{R}^3$ حيث $x = x'$ وبالتالي:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3) \Longrightarrow x_1 = x'_1 \text{ and } x_2 = x'_2 \text{ and } x_3 = x'_3$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 + ix'_2 \\ x'_1 - ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow H_x = H_{x'} \Longrightarrow f(x) = f(x')$$

- f تطبيق متباين لأنه إذا كان $f(x) = f(x')$ حيث $x, x' \in \mathbb{R}^3$ فإن:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 + ix'_2 \\ x'_1 - ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_i = x'_i$$

حيث $i = 1, 2, 3$

$$\Longrightarrow x = x' \Longrightarrow$$ f متباين

- f غامر لأن إذا كان $H_x \in M_2^+$ فإنه يوجد

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$$

حيث $f(x) = H_x$

- f خطي لأن: إذا كان $x, x' \in \mathbb{R}^3$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن:

$$f(\alpha x + x') = H_{\alpha x + x'} = \begin{pmatrix} \alpha x_3 + x'_3 & (\alpha x_1 + x'_1) + i(\alpha x_2 + x'_2) \\ (\alpha x_1 + x'_1) - i(\alpha x_2 + x'_2) & -(\alpha x_3 + x'_3) \end{pmatrix}$$

وأيضاً: $= \alpha H_x + H_{x'} = \alpha f(x) + f(x')$

إذن هذا التطبيق الذي بنيناه هو تقابل:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2^+$$
$$x \longmapsto H_x$$

≫ نحن نريد إيجاد تطبيق من $\mathbb{R}^3$ إلى $\mathbb{R}^3$ حيث يربط كل عنصر $x \in \mathbb{R}^3$ بعنصر y من $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[\text{تقابل}]{} & M_2^+ & \xrightarrow[\text{سوف نشرحه الآن}]{} & M_2^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longrightarrow & H_x & \longrightarrow & H_y & \longrightarrow & y \end{array}$$

* - إذا كان $g \in SU(2)$ فإن العلاقة :

$$\varphi_g^+ : M_2^+ \longrightarrow M_2^+$$
$$H_x \longmapsto H_y = g\cdot H\cdot g^{-1}$$

((تتحقق أن $g\cdot H_x\cdot g^{-1} \in M_2^+$)) .

فهذا أن φ_g^+ تطبيق خطي غامر لأن

• φ_g^+ تطبيق لأنه :

$$H_x = H_{x'} \Rightarrow g H_x g^{-1} = g H_{x'} g^{-1} \Rightarrow \varphi_g^+(H_x) = \varphi_g^+(H_{x'})$$

• φ_g^+ غامر لأنه إذا كان $H_y \in M_2^+$ فإنه يوجد $g^{-1}\cdot H_y\cdot g \in M_2^+$ حيث يكون :

$$\varphi_g^+(g^{-1}\cdot H_y\cdot g) = g(g^{-1}\cdot H_y\cdot g)g^{-1} = H_y$$

• φ_g^+ خطي لأن :

$$\varphi_g^+(\alpha H_x + H_{x'}) = g\cdot(\alpha H_x + H_{x'})\cdot g^{-1} = \alpha(g\cdot H_x\cdot g^{-1}) + g H_{x'} g^{-1}$$
$$= \alpha\,\varphi_g^+(H_x) + \varphi_g^+(H_{x'})$$

إذن : $\varphi_g^+ : M_2^+ \longrightarrow M_2^+$ تطبيق خطي غامر .
$$H_x \longmapsto H_y = g\cdot H_x\cdot g^{-1} \quad (*)$$

* لنأخذ العلاقة $\varphi_g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$$x \longmapsto y$$
حيث y معرفة بالصيغة * :

• فيكون φ_g مؤثر خطي متعامد لأن : $\varphi_g = f^{-1}\cdot\varphi_g^+\cdot f$ (تركيب تطبيقات خطية)

إثبات ذلك : إذا كان $x \in \mathbb{R}^3$ فإن :

$$(f^{-1}\circ\varphi_g^+\circ f)(x) = f^{-1}\cdot\varphi_g^+(H_x) = f^{-1}(H_y) \underset{\text{التقابل}}{=} y = \varphi_g(x)$$

• φ_g متعامد يجب أن نثبت أن φ_g تقايس أي $\forall x \in \mathbb{R}^3 : \|\varphi_g(x)\| = \|x\|$

لدينا :

$$\|\varphi_g(x)\|^2 = \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -\det H_y = -\det(g\cdot H_x\cdot g^{-1})$$
$$= -\det(H_x)$$
$$= -(-\|x\|^2) = \|x\|^2$$

وبما أن الظرف موجب يتم المطلوب . $\Leftarrow$ φ_g مؤثر واحدي .

* أخيراً لنأخذ العلاقة

$$\varphi : SU(2) \longrightarrow O(3)$$

$$g \longmapsto \varphi_g$$

إن هذه العلاقة هي تشاكل زمري ولإثبات ذلك يكفي أن نثبت أن:

$$\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1 g_2}$$

يترك كتمرين وظيفة.

وبذلك نكون قد أوجدنا تمثيلاً للزمرة SU(2) في الزمرة O(3)

أي كل مصفوفة من O(3) تعين جملة محاور إحداثية (ثلاثية) متعامدة منتظمة.

Finished Lecture...

انتهى المقرر بعون الله

إيمان الحلبوني