المحاضرة الثامنة — الاثنين ٢٠١٥/٤/٦ م

تتمة شرح وبرهان المعايير المرتبطة
شرط ليبشتز

- المعيار الثالث: إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k=1$ فإن f دالة ذات تغير محدود ولكن العكس ليس صحيح بالضرورة

البرهان:

لنبرهن أنه إذا كانت f تحقق شرط ليبشتز من أجل $k=1$ فإن f ذات تغير محدود (أي)

$$\bigvee_a^b(f) < +\infty \leftarrow \text{لنبرهن على ذلك}$$

لتكن P تجزئة اختيارية كيفية: $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$
ولتكن $x_k, x_{k-1} \in [a,b]$

وفق شرط ليبشتز: $\exists L>0 : |f(x_k)-f(x_{k-1})| \le L|x_k-x_{k-1}|$

نجمع المقدار $|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ من $k=1$ إلى n فنكون

$$\sum_{k=1}^{\wedge}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{\wedge} L|x_k-x_{k-1}|$$

$$\sum_{k=1}^{\wedge}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le L\underbrace{\sum_{k=1}^{\wedge}|x_k-x_{k-1}|}_{k=1}$$

$$|x_1-x_0|+|x_2-x_1|+\dots+|x_n-x_{n-1}|$$

$$x_{k-1}<x_k \Rightarrow x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1}$$

$$x_n-x_0=b-a$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\wedge}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le L(b-a)$$

مقدار محدود

$$V(f,P) \le L(b-a) < +\infty$$

وكان P تجزئة اختيارية $\Leftarrow$

f ذات تغير محدود $\Leftrightarrow \bigvee_a^b(f) < +\infty$

Magic Book

ولكن عكس المبرهنة السابقة ليس صحيح بالضرورة والمثال الآتي يبين ذلك...

مثال: f دالة معرفة على $[0, \frac{1}{2}]$ بالشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x} & ; x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1. بين أن f دالة مستمرة على $[0, \frac{1}{2}]$
2. برهن ان f دالة متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$
3. هل f دالة تغير محدود، اوجد $V_0^{1/2}(f)$
4. بين أن f دالة لا تحقق شرط ليبشتز من المرتبة $k=1$،

حل الطلب الرابع: نأخذ $v=0$ و u نسعى إلى الصفر اي $u \to 0$
ولندرس المقدار الآتي:

$$\left| \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right|$$

$$\left| \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right| = \lim_{u \to 0} \left| \frac{f(u)-f(0)}{u-0} \right| = \lim_{u \to 0} \left| \frac{-\frac{1}{\ln u}}{u} \right|$$

$$= \lim_{u \to 0} \left| \frac{1}{u \ln u} \right| \Rightarrow L = \lim_{u \to 0} \left| \frac{\frac{1}{u}}{\ln u} \right| = \lim_{u \to 0} \left| \frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u}} \right| =$$

حسب اوبتال

$$L = \lim_{u \to 0} \left| -\frac{1}{u} \right| = +\infty$$

وبالتالي f دالة تغير محدود ولكن لا تحقق شرط ليبشتز.

انتهت المحاضرة ...