المحاضرة الحادية عشرة — الخميس ١٦/٤/٢٠١٥م

خواص تكامل استيلجس

- تعريف تكامل استيلجس. / ملاحظات /
- خواص تكامل استيلجس.
- مسألة وجود تكامل استيلجس.
- أمثلة وتطبيقات.

- تعريف تكامل استيلجس: "نذكره سريعاً"

f, g دالتان حقيقيتان معرفتان ومحدودتان على المجال $[a, b]$

P تجزئة للمجال $[a, b]$ بحيث $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

نشكل مجموع استيلجس للدالة f بالنسبة إلى g كما يلي:

$$S(f, g, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta(g(x_k))$$

حيث $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ و $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$

نأخذ النهاية: $\lim S(f, g, P) = A = (S) \int_a^b f \, dg$

إذا كان A موجود ومحدود ومستقل عن التجزئة وعن t_k عندئذٍ ندعو A تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة لـ g ونرمز له بـ $\int_a f \, dg = A$

$$\Delta x \equiv \Delta P \equiv \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$

- ملاحظات:

1. $g(x) = x \Rightarrow$ تكامل استيلجس يرجع إلى تكامل ريمان

$$(S) \int_a^b f \, dg = (R) \int_a^b f \, dx$$

2. $f(x) = 1 \Rightarrow$

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^b 1 \, dg = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta g(x_k)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k) - g(x_{k-1})$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + \dots + g(x_n) - g(x_{n-1})]$$

$$= g(b) - g(a)$$

خواص تكامل استيلجس :

$\boxed{1}$ $$\int_a^b [f_1(x) \mp f_2(x)]\, dg(x) = \underbrace{\int_a^b f_1(x)\, dg(x)}_{\text{موجود}} \mp \underbrace{\int_a^b f_2(x)\, dg(x)}_{\text{موجود}}$$

⇐ المساواة محققة

$\boxed{2}$ $$\int_a^b f(x)\, d[g_1(x) \mp g_2(x)] = \underbrace{\int_a^b f(x)\, dg_1(x)}_{\text{موجود}} \mp \underbrace{\int_a^b f(x)\, dg_2(x)}_{\text{موجود}}$$

⇐ المساواة محققة

$\boxed{3}$ $$\int_a^b \alpha f(x)\, d(\beta g(x)) = \alpha\beta \int_a^b f(x)\, dg(x) \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{4}$ $$\int_a^b [\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)]\, dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x)\, g(x) + \beta \int_a^b f_2(x)\, dg(x)$$

لنبرهن الخاصة $\boxed{4}$:

لتكن P تجزئة للمجال $[a,b]$ كما يلي : $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

عندئذٍ :

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2, g, P) = \sum_{k=1}^{n} [\alpha f_1(t_k) + \beta f_2(t_k)]\, \Delta g(x_k)$$

$$= \underbrace{\alpha \sum_{k=1}^{n} f_1(t_k)\, \Delta g(x_k)}_{} + \underbrace{\beta \sum_{k=1}^{n} f_2(t_k)\, \Delta g(x_k)}_{}$$

$$= \alpha S(f_1, g, P) + \beta S(f_2, g, P)$$

بأخذ نهاية الطرفين فنجد أن عندما $\Delta x \to 0$:

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)\, dg = \alpha \int_a^b f_1\, dg + \beta \int_a^b f_2\, dg$$

وهو المطلوب.

5 - مبرهنة التكامل بالتجزئة:

إذا كان احد التكاملين $\int_a^b f\,dg$ او $\int_a^b g\,df$ موجوداً فإن الآخر موجود... وتتحقق العلاقة التالية:

$$\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = [f(x).g(x)]_a^b$$

حيث:
$$[f(x).g(x)]_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a)$$

6 - إذا كان التكامل $\int_a^b f\,dg$ موجوداً وكانت $a<c<b$ فإن التكامل $\int_c^b f\,dg$ والتكامل $\int_a^c f\,dg$ يكونا موجودين وتتحقق العلاقة

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg$$

ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح

7 - إذا كان التكاملان $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ موجودين بحيث $a<c<b$ وكان احد التابعين f او g مستمر عند c والآخر محدود في جوارها عندئذٍ التكامل: $\int_a^b f\,dg$ موجود

أي f مستمر عند c و g محدود في جوارها

او g مستمر عند c و f محدود في جوارها

8
$$\int_a^a f\,dg = 0$$

9
$$\int_a^b f\,dg = -\int_b^a f\,dg \;;\; \underbrace{b<a \vee a<b}_{\Updownarrow\; a\neq b}$$

لبرهن مبرهنة التكامل بالتجزئة ((التكامل ستيلجس)):

نفرض ان التكامل: $\int_a^b g\,df$ موجوداً إذاً لبرهن ان $\int_a^b f\,dg$ موجود

/ /

لنأخذ تجزئة للمجال $[a,b]$ كما يلي. $P=\{a=x_0<x_1<\dots<b=x_n\}$

$$S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right)$$

حيث $t_k\in[x_{k-1},x_k]$

$$\begin{array}{ccccccc} & t_1 & & & & t_n & \\ a=x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} & b=x_n \\ \shortparallel & & & & & & \shortparallel \\ t_0 & & & & & & t_{n+1} \end{array}$$

$$\Rightarrow S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k).g(x_k)-\sum_{k=1}^{n} f(t_k).g(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k).g(x_k)-\sum_{k=2}^{n} f(t_k).g(x_{k-1})+f(t_n).g(b)-$$

$$-f(t_1).g(a)$$

$$\Rightarrow S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(t_k).g(x_k)-f(t_{k+1}).g(x_k)\right]+f(t_n)g(b)-$$
$$-f(t_1).g(a)]$$

$$\Rightarrow S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n-1}\left[-g(x_k)\right]\left(f(t_{k+1})-f(t_k)\right)+f(t_n).g(b)-$$
$$-f(t_1).g(a)]$$

نضيف المقدار $f(a).g(a)-f(a).g(a)+f(a).g(a)-f(a).g(b)$
حيث أنه لا يتغير $S(f,g,P)$ بهذه الإضافة

$$\Rightarrow S(f,g,P)=\sum_{k=1}^{n-1} -g(x_k)\left[f(t_{k+1})-f(t_k)\right]+f(t_n).g(b)-$$

$$-f(t_1).g(a)+f(b).g(b)-f(a).g(a)+f(a).g(a)-$$

$$-f(b).g(b)$$

$$\Rightarrow S(f,g,P)=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\Big(\Big[\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k).\left[f(t_{k+1})-f(t_k)\right]+$$
$$+g(b)\left[f(b)-f(t_n)\right]+g(a)\left[f(t_1)-f(a)\right]\Big)$$

Magic Book

$$\Rightarrow S(f,g,P) = \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(t_{k+1}) - f(t_k)\right]$$

حيث $\begin{pmatrix} t_0 = a \\ t_{n+1} = b \end{pmatrix}$ "موضحين بالرجعة السابقة"

$$\Rightarrow S(f,g,P) = \underbrace{\left[f(x).g(x)\right]_a^b}_{\text{موجود}} - \underbrace{S(g,f,P')}_{\text{موجود}}$$

حيث $P' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$

نأخذ نهاية الطرفين عندما:

$$\Delta P' \longrightarrow 0 \iff \Delta P \longrightarrow 0$$

$$\Delta t \longrightarrow 0 \iff \Delta x \longrightarrow 0$$

ومنه

$$\int_a^b f\,dg = \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \int_a^b g\,df$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = \left[f(x).g(x)\right]_a^b$$

انتهت المحاضرة...