/ /

الأربعاء: 2015/5/20

المحاضرة السابعة عشرة

الدالة σ :

تعريفها:

هي دالة عددية قيمتها عند العدد n تساوي مجموع القواسم الصحيحة الموجبة المختلفة للعدد n

ونكتب: $\sigma(n) = \sum_{d|n} d \quad , n \in \mathbb{Z}^+$

مثال:

$\sigma(1) = 1 \quad \sigma(2) = 3 \quad \sigma(3) = 4 \quad \sigma(4) = 7$

$\sigma(5) = 6 \quad \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

$\sigma(7) = 8 \quad \sigma(8) = 15$

مبرهنة:

الدالة σ هي دالة ضربية.

الإثبات:

1) $\sigma(1) = 1$

2) لدينا $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ إذا كانت f ضربية فإن F ضربية، لدينا $f(d) = d \Leftarrow f(1) = 1$

$f(d_1 . d_2) = d_1 . d_2 = f(d_1) . f(d_2)$

وبما أن $f(d) = d$ دالة ضربية فحسب نتيجة سابقة فإن $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ هي دالة ضربية

/ /

خواص $\sigma(n)$:

1) إذا كان $n = p^{a}$ فإن

$$\sigma(p^{a}) = 1 + p + p^{2} + \cdots + p^{a}$$

$$= \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

2) إذا كان $n > 1$ ومكتب بالشكل القانوني $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$

فإن

بما أن σ دالة ضربية

$$\sigma(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}) = \sigma(p_1^{a_1})\,\sigma(p_2^{a_2}) \cdots \sigma(p_r^{a_r})$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

مثال:

$$\sigma(180) = \sigma(2^{2} . 3^{2} . 5) = \frac{2^{3}-1}{2-1} \; \frac{3^{3}-1}{3-1} \; \frac{5^{2}-1}{5-1}$$

$$= \frac{7}{1} \; \frac{26}{2} \; \frac{24}{4} = 546$$

ملاحظة:

إن الدالتين τ, σ ليستا ضربيتين تماماً إذ نلاحظ أن:

$$\tau(20) = \tau(2^{2}.5) = (3) \times (2) = 6$$

$$\tau(2 \times 10) = \tau(2) \times \tau(10) = 2 \times 4 = 8$$

$$\Rightarrow \tau(20) \neq \tau(2 \times 10)$$

كذلك:

$$\sigma(20) = \sigma(2^{2}.5) = \frac{2^{3}-1}{1} \; \frac{5^{2}-1}{4} = 7 \times 6 = 42$$

$$\sigma(2).\sigma(10) = 3 \times 18 = 54$$

$\Rightarrow \sigma(20) \neq \sigma(2).\sigma(10)$.

الأعداد التامة أو الأعداد الكاملة:

تعاريف:

* نقول عن العدد n إنه تام إذا كان $\sigma(n) = 2.n$ أي: إذا كان مجموع قواسم العدد ماعداه يساوي نفسه.

مثال:

$\sigma(6) = 12$

$\sigma(28) = \sigma(2^2.7) = \frac{2^3-1}{1} . \frac{7^2-1}{6} = 7 \times 8 = 56$

$\sigma(6) = 2 \times 6$ $\qquad$ $\sigma(28) = 2 \times 28$

* نقول عن العدد n إنه فوق التام (عدد زائد) إذا كان $\sigma(n) > 2n$

مثال: $\sigma(12) = \sigma(2^2.3) = \frac{2^3-1}{1} . \frac{3^2-1}{2}$

$= 7 \times 4 = 28 > 2 \times 12$

* نقول عن العدد n إنه تحت التام (عدد ناقص) إذا كان $\sigma(n) < 2n$

مثال:

$\sigma(8) = 15 < 2 \times 8 = 16$

* نقول عن العددين m , n إنهما متحابان إذا كان:

$\sigma(n) = \sigma(m) = n + m$

أي إذا كان

مجموع قواسم العدد الأول ماعداه يعطي العدد الثاني $\sigma(n) - n = m$

و مجموع قواسم العدد الثاني ماعداه يعطي العدد الأول $\sigma(m) - m = n$

مثال: العددان 220 ، 284 هما عددان متحابان

$\sigma(220) - 220 = 284$

$\sigma(284) - 284 = 220$

- وُجد أن العددين 17296, 18416 هما عددان متحابان
ووجد ديكارت 9363584, 9437056 أنهما عددين متحابين)
كما وجد أولر العددين المتحابين 1210, 1184

كما وجد العلماء أن جميع الأعداد التامة هي أعداد زوجية فقط.

- هل يوجد أعداد تامة فردية؟ (مسألة مفتوحة)
وتبين أنه لا يوجد عدد فردي أصغر من 10^{200} يكون عدد تام.

- إن مسألة البحث عن صيغة للأعداد الكاملة مسألة قديمة، وقد أثبت اقليدس أنه إذا كان المجموع
$\sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 = 1+2+2^2+ \dots + 2^{k-1} = p$ عدداً أولياً فإن
العدد $2^{k-1} p$ هو عدد تام

مثال:

$1+2=3$ أولي ⇐ $3\times 2 = 6$ عدد تام

$1+2+2^2 = 7$ " ⇐ $4\times 7 = 28$ عدد تام

$1+2+2^2+2^3 = 15$ غير أولي

$1+2+2^2+2^3+2^4 = 31$ أولي ⇐ $2^4 \times 31$ تام

مبرهنة:

إذا كان العدد $2^k - 1$ حيث $k>1$ أولياً فإن العدد $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$
هو عدد تام، وكل عدد تام زوجي هو من الشكل
$2^{k-1}(2^k-1)$

/ /

كذلك يكون العدد $A = 2^k(2^k - 1)$ عدد فوق التام (عدد زائد)

والعدد $B = 2^{k-2}(2^k - 1)$ هو عدد تحت التام (عدد ناقص)

مثال:

$k = 2 \Rightarrow 2^2 - 1 = 3 = p$ أولي

$\Rightarrow n = 2.(3) = 6$ تام

$k = 3 \Rightarrow 2^k - 1 = 2^3 - 1 = 7$ أولي

$\Rightarrow n = 2^2(7) = 28$ تام

$A = 2^3(7) = 56$ فوق التام

$B = 2.7 = 14$ تحت التام

أعداد ميرسين:

هي الأعداد التي تأخذ الشكل

$$M_k = 2^k - 1$$

وتسمى الأعداد التي تأخذ الشكل

$M_p = 2^p - 1$ ؛ p عدد أولي أعداد ميرسين الأولية.

- من أجل القيم التالية لـ p تعطي صيغة ميرسين أعداداً أولية:

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257, \dots\}$$

كذلك وُجد أن M_{31} عدد أولي وقد أثبت أنه أولي في عام 1876

وتم إثبات في 2009 أن العدد $2^{371560667} - 1$

هو عدد ميرسين أولي مؤلف من 11185272 رقم.

مبرهنة:

إذا كان العدد $a^k - 1$ عدداً أولياً عندما $a > 0$ ، $k \geq 2$

فإن $a = 2$ ، k عدد أولي.

دالة موبياس μ:

تعريف:

دالة موبياس هي دالة عددية تعرف ب:

$$\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, -1\}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ 0 & , p^2 \mid n \quad \text{إذا وجد عدد } p \text{ أولي} \\ (-1)^r & , n = p_1 p_2 \cdots p_r \quad ; \; p_i \text{ أوليات مختلفة} \end{cases}$$

مثال:

$\mu(1) = 1$, $\mu(2) = \mu(3) = \mu(5) = -1$

$\mu(4) = 0$, $\mu(6) = \mu(2.3) = (-1)^2 = 1$

$\mu(2.3.5) = (-1)^3 = -1$

مبرهنة:

دالة موبياس μ هي دالة ضربية:

1) $\mu(1) = 1$

2) $\mu(n, m) = \mu(n) . \mu(m)$; $(n, m) = 1$

$\mu(30) = \mu(2.15) = \mu(2) . \mu(15) = -1 \times 1^2 = -1$

صيغة موبياس العكسية:

إذا كانت F, f دالتين عدديتين وكانت:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

فإن:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$$

دالة ليوفيل:

هي دالة عددية تعرف.

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 , & n=1 \\ (-1)^{a_1+\cdots+a_r} ; & n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} \end{cases}$$

كذلك دالة ليوفيل λ هي دالة ضربية.

$\lambda(2) = -1 \qquad \lambda(p) = -1 \qquad \lambda(4) = 1$

دالة ماجود:

هي دالة عددية تعرف ب.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & k \geq 1 , \ n = p^k \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

تمرين وظيفة:

برهن أن:

1) $\sum_{d|n} \Lambda(n) = \log n$

2) $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d$

انتهت المحاضرة ..